

Variables aléatoires (Partie 3)

Couples de v.a.r discrètes

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, X et Y sont deux v.a.r discrètes définies sur un même espace probabilisé (Ω, p) . On suppose que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont respectivement les ensembles $\{x_i \mid i \in I\}$ et $\{y_j \mid j \in J\}$ où I et J (non nécessairement égal à I) sont soit des parties finies de $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ tout entier.

1 Loi d'un couple de v.a.r, lois marginales et indépendance

Définition 1.1

On appelle *couple* de v.a.r discrètes et on note (X, Y) toute application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ pour tout ω de Ω .

Exemple 1.2

Une urne contient 1 boule bleue, 2 boules blanches et 3 boules rouges. On tire simultanément 2 boules de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables. Soit X le nombre de boules bleues tirées et soit Y le nombre de boules blanches tirées.

Définition 1.3

On appelle *loi du couple* de v.a.r discrètes (X, Y) , ou encore *loi conjointe* des v.a.r X et Y , l'ensemble des couples $((x_i, y_j), p_{i,j})$ où $x_i \in X(\Omega)$, $y_j \in Y(\Omega)$ $p_{i,j} = p((X=x_i) \cap (Y=y_j))$

Remarque 1.4

Exemple 1.5

Remarque 1.6

Exemple 1.7

Une pièce de monnaie est truquée de façon à ce que la probabilité d'obtenir pile soit $\frac{1}{3}$. Dans des lancers successifs de cette pièce, on s'intéresse à X la première apparition de pile et à Y la première apparition de face. Et on cherche à déterminer la loi du couple (X, Y) . ST

Définition 1.8

Soit (X, Y) un couple de v.a.r discrètes. La loi de X est appelé la *première loi marginale* du couple (X, Y) et la loi de Y est appelée la *deuxième loi marginale* du couple (X, Y) .

Remarque 1.9

Propriété 1.10

Soit (X, Y) un couple de v.a.r discrètes. On a :

- $\forall i \in I, p(X=x_i) = \sum_{j \in J} p((X=x_i) \cap (Y=y_j))$
- $\forall j \in J, p(Y=y_j) = \sum_{i \in I} p((X=x_i) \cap (Y=y_j))$

Exemple 1.11**Définition 1.12**

Soit (X, Y) un couple de v.a.r discrètes et soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $p(Y=y) \neq 0$.

On appelle *loi conditionnelle à $(Y=y)$ de X* l'ensemble des couples $(x_i, p(X=x_i)_{|(Y=y)})$ pour $i \in I$ où

$$p(X=x_i)_{|(Y=y)} = \frac{p((X=x_i) \cap (Y=y))}{p(Y=y)}.$$

Remarque 1.13

On définit de façon symétrique, pour $x \in X(\Omega)$ tel que $p(X=x) \neq 0$, la *loi conditionnelle à $(X=x)$ de Y* .

Exemple 1.14**Définition 1.15**

On dit que deux v.a.r discrètes X et Y sont *indépendantes* si :

$$p((X=x) \cap (Y=y)) = p(X=x) \times p(Y=y) \quad \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

Exemple 1.16

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire deux jetons successivement. On suppose les tirages équiprobables. Soient X et Y les variables aléatoires respectivement égales aux valeurs du premier et du second jeton tiré.

Remarque 1.17**Propriété 1.18**

Si X et Y sont deux v.a.r indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2 Fonction de deux v.a.r discrètes

Dans toute cette partie g désigne une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ et Z est la variable aléatoire définie par $Z = g(X, Y)$. De plus, on suppose que $Z(\Omega) = g(X(\Omega) \times Y(\Omega)) = \{z_k/k \in K\}$ où K est soit une partie de $\mathbb{Z}$ soit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ tout entier.

Remarque 2.1**Propriété 2.2**

Soit $Z = g(X, Y)$. Alors on a : $p(Z = z_k) = \sum_{(i,j) | g(x_i, y_j) = z_k} p((X=x_i) \cap (Y=y_j))$

Exemple 2.3

3 Espérance et covariance

Propriété 3.1

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) p((X=x) \cap (Y=y))$$

Remarque 3.2

Propriété 3.3

- $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \times p((X=x) \cap (Y=y))$
- Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$

Remarque 3.4

Définition 3.5

Soient X et Y deux v.a.r discrètes.

Si elle existe, on appelle *covariance de X et de Y* le nombre $\text{cov}(X; Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

Propriété 3.6

Si cela est possible, alors $\text{cov}(X; Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Remarque 3.7

Rappel

$$E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i) = \sum_i x_i p_i$$

Exemple 3.8

Propriété 3.9

$$\text{cov}(Y; X) = \text{cov}(X; Y) \text{ et } \text{cov}(X; X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$$

Corollaire 3.10

Si X et Y sont indépendantes alors $\text{cov}(X; Y) = 0$.

Remarque 3.11

Définition 3.12

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont *non corrélées* si $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Remarque 3.13

Propriété 3.14

Soient X , X' et Y trois v.a.r discrètes et soient a, b deux réels.

Lorsque cela est définie, on a $\text{cov}(aX + bX'; Y) = a.\text{cov}(X; Y) + b.\text{cov}(X'; Y)$

Remarque 3.15

Par symétrie, on obtient $\text{cov}(X; aY + bY') = a.\text{cov}(X; Y) + b.\text{cov}(X; Y')$.

Définition 3.16

Soient X et Y deux v.a.r discrètes d'écart type non nul.

On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y le réel $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.

Remarque 3.17**Rappel**

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 \times P(X = x_i) = \sum_i x_i^2 p_i$$

Exemple 3.18**Exemple 3.19**

Soient X et Y deux variables aléatoires prenant leur valeurs suivant le tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2	
1	1/4	1/4	0	
2	1/8	1/24	a	
3	1/8	1/24	1/12	

On souhaite répondre aux questions suivantes :

1. Comment doit-on choisir le nombre réel a pour que le tableau précédent donne bien une loi conjointe du couple (X, Y) ?
2. Quelles sont alors les lois marginales de X et de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer le coefficient de corrélation de (X, Y) .
5. Déterminer la loi de Y conditionnée par $(X=3)$.

4 Somme de v.a.r discrètes**Propriété 4.1**

Soit X et Y deux v.a.r discrètes et a, b deux réels. Alors :

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2.\text{cov}(X; Y)$
- En particulier, si X et Y sont indépendantes $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Propriété 4.2

Si X et Y sont deux v.a.r *indépendantes* suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (n', p) alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + n', p)$.

Propriété 4.3

Si X et Y sont deux v.a.r *indépendantes* suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et λ' alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.