Dénombrement

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Ensembles finis

Notation

Pour tout couple d'entiers (n, p) avec $n \leq p$, on note $[\![n; p]\!]$ l'ensemble des entiers entre n et p c'est-à-dire $[\![n; p]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq p\}$.
En particulier, si $n \geq 1$ est un entier alors $[\![1; n]\!] = \mathbb{N}_n^*$ est l'ensemble des entiers naturels de 1 à n c'est-à-dire l'ensemble $\{1; 2; \ldots; n\}$.

Rappel

Une fonction est la donnée de trois choses : un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et un moyen d'associer, à un élément du premier ensemble, au plus un élément du deuxième que l'on appelle son *image*.
Si $y = f(x)$, on dit que x est *un antécédent* de y.

Par exemple, si $f(x) = x^2$, les antécédents de $y = 1$ sont $x = -1$ et $x = 1$.

Attention : il n'y a au plus une image mais il peut y avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.
Cela entraîne les définitions suivantes :

- On dit qu'une fonction est une *application* si et seulement sitout élément de l'ensemble de départ possède (exactement) une image.
- On dit qu'une fonction est *surjective* ou est *une surjection* si et seulement sitout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.
- On dit qu'une fonction est *injective* ou est *une injection* si et seulement sitout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent.
- On dit qu'une fonction est *bijective* ou est *une bijection* si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. Cela signifie que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède exactement un antécédent.

Définition 1.1

Deux ensembles sont dits *équipotents* s'il existe une bijection entre les deux ensembles.

Exemple 1.2

Définition 1.3

Un ensemble E est dit *fini* s'il existe un entier $n \geq 1$ et une bijection entre E et $[\![1; n]\!]$.
L'entier n est appelé cardinal de E et est noté $\text{card}(E)$.

Remarque 1.4

Par convention, on pose $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Propriété 1.5

Soit A une partie d'un ensemble fini E. Alors A est fini est $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.
De plus, $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ si et seulement si$A = E$.

Propriété 1.6

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E.
On a $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Exemple 1.7

Remarques 1.8

Propriété 1.9

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. On a :
$\text{card}(A \cup B \cup C)$
$= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

Remarques 1.10

Exemple 1.11

Dans un groupe d'étudiants de deuxième année de Licence, les étudiants peuvent choisir les options A, B et C. Les effectifs des options sont :
Option A : 15 étudiants
Option B : 19 étudiants
Option C : 18 étudiants
Sachant que 3 étudiants ont pris les 3 options, 7 étudiants ont pris les options A et B, 8 étudiants ont pris les options B et C et 5 étudiants ont pris les options A et C, combien y-a-t-il d'étudiants dans ce groupe qui ont pris au moins une option?

2 Factorielle et permutations

Définition 2.1

On appelle factorielle d'un entier naturel $n \geq 2$ et on note $n\,!$, le produit de tous les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n.
Autrement dit, $n\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i$.

Remarques 2.2

- Par convention, $0\,! = 1$ et $1\,! = 1$.
- On aurait pu définir la factorielle par récurrence : $0\,! = 1$ et $n\,! = n \times (n-1)\,!$ pour tout $n \geq 1$.

Exemples 2.3

Propriété 2.4

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments c'est-à-dire le nombre de bijections de E dans lui-même est $n\,!$.

Remarque 2.5

On peut voir une permutation de E comme un classement ordonné des n éléments de E.

Exemples 2.6

- On considère des jetons de scrabble.
  - Combien de mots différents ayant un sens ou non, peut-on faire avec les jetons A, B et C?
  - Combien de mots différents ayant un sens ou non, peut-on faire avec 9 jetons différents?
- On cherche à dénombrer les anagrammes des mots suivants
  - MATHS
  - RIRE
  - ANANAS
- Combien y-a-t-il de résultats après avoir battu un jeu de 32 cartes?
- On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique (indifférentiables), et 3 de chimie (indifférentiables). De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :
  - Si les livres doivent être groupés par matières.
  - Si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

3 Listes, arrangements et combinaisons

Propriété 3.1

Soient E et F deux ensembles finis alors $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Exemple 3.2

Propriété 3.3

Soient E un ensemble fini et soit $p \geq 1$ un entier alors $\text{card}(E^p) = \text{card}(E)^p$.

Exemple 3.4

Définition 3.5

Soit E un ensemble fini à n éléments et soit $p \geq 1$ un entier.
On appelle p-liste d'éléments de E toute liste $(a_1, \ldots, a_p)$ ordonnée de p éléments de E qui peuvent éventuellement être répétés. L'ensemble de toutes les p-listes de E est noté E^p.

Propriété 3.6

Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

Exemples 3.7

- Combien de nombres différents de 5 chiffres peut-on écrire avec les caractères 0 et 1?
- Combien de mots différents de 4 lettres ayant un sens ou non peut-on écrire avec les caractères a, b, c, d, e, f et g?
- Le jeu simon possède 4 touches de couleurs différentes. Il s'agit dans ce jeu de retenir une séquence de plus en plus longue de combinaison de ces touches. Combien de choix a-t-on pour un séquence de 7 touches (couleurs)?
- Combien de mots différents de 5 lettres ayant un sens ou non peut-on écrire avec les lettres de l'alphabet latin?

Remarque 3.8

Définition 3.9

Un arrangement de p objets de E et une p-liste de E dont les éléments sont deux à deux distincts.

Remarque 3.10

Propriété 3.11

Le nombre d'arrangements différents de $p(\geq 0)$ éléments choisis parmi $n(\geq p)$ est noté A_n^p.
Il vaut : $A_n^p = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$.

Exemples 3.12

- Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.
  - Combien de façons peut-on attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie?
  -Même question mais en sachant que plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
  -Même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.
- Après les prolongations d'un match de football, le capitaine doit choisir 5 joueurs pour l'épreuve des tirs au but. Il souhaite de plus définir un ordre de passage. Combien de choix a-t-il?
- Une course hippique fait intervenir 18 chevaux qui sont tous à l'arrivée. Sachant qu'il n'y a pas d'ex-æquo, quel est le nombre de tiercés dans l'ordre possible?
- Pour un tirage au sort des gains d'une loterie locale, une urne contient des boules avec le numéro des joueurs de 1 à 100. Pour désigner les trois premiers gagnants dans l'ordre, on tire succéssivement et sans remise 3 boules. Combien y-a-il de combinaisons possibles?

Remarques 3.13

- Un arrangement des n éléments d'un ensemble est une permutation et donc $A_n^n = n\,!$.
- Si $p > n$ alors on ne peut pas faire un arrangement à p éléments dans un ensemble à n élements, on a donc $A_n^p = 0$

Définition 3.14

On appelle *combinaison* de p éléments parmi n tout sous-ensemble à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque 3.15

Propriété 3.16

Le nombre de combinaisons différentes de $p(\geq 0)$ éléments choisis parmi $n(\geq p)$ est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.
Il vaut : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p\,!} = \dfrac{n\,!}{p\,! \times (n-p)\,!}$.

Remarque 3.17

Si $n < p$, il n'y a pas de sous-ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
On a donc $\binom{n}{p} = 0$.

Exemples 3.18

- Anciennement au loto, il fallait cocher 6 cases dans une grille parmi 49. Combien y avait-il de grilles différentes possibles?
- Actuellement au loto, il faut cocher 5 cases dans une grille parmi 49 et une étoile parmi 10. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles?
- Après les prolongations d'un match de football, le capitaine doit choisir 5 joueurs pour l'épreuve des tirs au but. Et (contrairement à l'idée répandue) il n'a pas à définir d'ordre de passage. Combien de choix a-t-il?

- Dans un groupe de 8 jeunes comprenant 6 garçons et 2 filles, on décide de choisir un comité de 3 d'entre eux.
  - Combien y-a-t-il de comités possibles?
  - Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille?
  - Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons?

Lemme 3.19 (Le principe des tiroirs ou principe des pigeons ou principe de Dirichlet) *Si on dispose d'une commode avec n tiroirs et que l'on doit y ranger $n+1$ paires de chaussettes alors il y aura un tiroir qui contiendra au moins 2 paires de chaussettes.*