Equations différentielles

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Généralités

Définition 1.1

Une *équation différentielle* est une relation entre une variable réelle (par exemple x), une fonction qui dépend de cette variable (par exemple y) et un certain nombre de ses dérivées successives. Lorsque la dérivée de plus haut degré de la fonction (qui apparaît réellement) est la n-ième ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que l'équation différentielle est d'ordre n.

Exemples 1.2

Remarques 1.3

• Une équation différentielle d'ordre n peut donc s'écrire sous la forme : $\phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ ou encore $\phi(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$ où y est donc une fonction qui dépend de x et ϕ est une fonction des $n+2$ variables $x, y, y', y'', ..., y^{(n)}$.
Nous nous intéresserons aux fonctions y à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Il nous arrivera de rencontrer $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ à la place de y' et nous pourrons avoir des équations de la forme $2xdx = y^2dy$.

Définition 1.4

Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle $\phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier, c'est trouver toutes les fonctions f telles que :

(a) f soit n fois dérivable sur I

(b) $\forall x \in I$, $\phi(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$

Une fonction qui vérifie les conditions (a) et (b) est appelée *solution (ou intégrale) particulière* de l'équation différentielle et sa courbe représentative est appelée *courbe intégrale* de l'équation différentielle.
On appelle *solution (ou intégrale) générale* de l'équation l'ensemble de toutes les fonctions solutions.
On appelle *courbes intégrales* d'une équation différentielle l'ensemble des courbes représentatives de toutes les solutions de cette équation différentielle.

Remarques 1.5

• En pratique, on suppose souvent que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

• Si Id_I désigne l'application identité de $\mathbb{R}$ restreint à I, on peut aussi écrire $\phi(Id_I, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ où 0 designe la fonction nulle sur I.

• Dans certains cas, à partir de la solution générale d'une équation différentielle, on peut rechercher une solution particulière satisfaisant à certaines conditions appelées *conditions initiales.* En général, ces conditions concernent les valeurs prises par la fonction ou certaines dérivées en une valeur x_0.

Exemples 1.6

Définition 1.7

On appelle *équation simplifiée* toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme $f(x, y^{(n)}) = 0$.

Méthode de résolution

Si on peut mettre l'équation sous la forme $y^{(n)} = g(x)$ alors il suffit d'intégrer n fois la fonction g.

Exemple 1.8

2 Equations différentielles du premier ordre

Définition 2.1

On appelle *équation à variables séparables* toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $a(x) + b(y)y' = 0$ où a et b sont des applications continues sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution

Soient A et B des primitives respectivement de a et de b sur un intervalle I où a et b sont continues. En intégrant l'égalité, on obtient $A(x) + B(y) = cste$ Si B admet une application réciproque B^{-1}, on obtient $y = B^{-1}(-A(x) + cste)$.

Exemple 2.2

Remarque 2.3

Il arrivera que l'on ne puisse pas obtenir y en fonction de x.

Définition 2.4

On appelle *équation linéaire du premier ordre* toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ où a, b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser.
L'équation est dite normalisée si $a(x) = 1 (\forall x)$ c'est-à-dire si elle est de la forme $y' + b(x)y + c(x) = 0$.

Remarques 2.5

Méthode de résolution pour les équations linéaires du premier ordre sans second membre

Nous nous intéressons dans un premier temps aux équations de la forme $y' + b(x)y = 0$.
C'est une équation à variables séparables dont la solution générale est $y = ke^{-B(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ et B est une primitive de b.

Exemples 2.6

Méthode de résolution pour les équations linéaires du premier ordre avec second membre

Soient y_1 et y_2 deux solutions de $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0 \quad (2)$.
On a donc $a(x)y_1' + b(x)y_1 + c(x) = 0$
et $\qquad a(x)y_2' + b(x)y_2 + c(x) = 0$.
D'où, en soustrayant les équations, $a(x)y_1' - a(x)y_2' + b(x)y_1 - b(x)y_2 = 0$
C'est-à-dire $a(x)(y_1 - y_2)' + b(x)(y_1 - y_2) = 0$
Donc $y_1 - y_2$ est une solution de l'équation sans second membre associée : $a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (3)$
Ou encore $y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}y = 0 \quad (3')$ sur tout intervalle où a ne s'annule pas.
D'où la méthode :

(i) On résout d'abord l'équation (3).

(ii) On détermine ensuite une solution particulière de (2).

(iii) Les solutions générales de (2) s'obtiennent en ajoutant les solutions de (3) et la solution particulière trouvée de (2).

Pour trouver une solution particulière de (2), on utilise la méthode suivante dite de la variation de la constante.
Sur un intervalle où a ne s'annule pas, soit D est une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$.
Les solutions de (3') sont de la forme $y = ke^{-D(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$.
On suppose que la solution particulière y_0 de (2) est de la forme $y_0 = ke^{-D(x)}$ où k cette fois-ci est une fonction de x c'est-à-dire $y_0 = k(x)e^{-D(x)}$.
En dérivant, on obtient $y_0' = k'(x)e^{-D(x)} - \dfrac{b(x)}{a(x)}k(x)e^{-D(x)}$.
En insérant ces valeurs dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned} a(x)y_0' + b(x)y_0 &= a(x)\left[k'(x)e^{-D(x)} - \frac{b(x)}{a(x)}k(x)e^{-D(x)}\right] + b(x)k(x)e^{-D(x)} = a(x)k'(x)e^{-D(x)} \\ &= -c(x) \end{aligned}$$

Et donc $k'(x) = -\dfrac{c(x)}{a(x)}e^{D(x)}$.
Il "suffit" de déterminer une primitive $F(x)$ de $-\dfrac{c(x)}{a(x)}e^{D(x)}$ et alors $y_0 = F(x)e^{-D(x)}$.

Remarque 2.7

Dans le cas où a et b sont des constantes, on peut aussi chercher des solutions de (2) sous des formes particulières.

Exemple 2.8

3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Equations sans second membre

Définition 3.1

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre* toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
(4) $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$
($a \neq 0$ sinon nous sommes dans le cas du linéaire premier ordre).

Remarques 3.2

Définitions 3.3

On appelle polynôme caractéristique de l'équation (4), le polynôme $P = aX^2 + bX + c$.
On appelle discriminant de l'équation (4), le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque 3.4

Attention, la résolution de l'équation caractéristique se fait dans $\mathbb{C}$.

Propriété 3.5

Avec les notations précédentes,

- Si $\Delta > 0$ et si r_1 et r_2 sont les racines de P alors les solutions de (4) sont de la forme :
  $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ et si r est la racine double de P alors les solutions de (4) sont de la forme :
  $y = (\lambda x + \mu) e^{rx}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta < 0$ et si $r_1 = \alpha + \beta i$ et $r_2 = \alpha - \beta i$ sont les racines de P alors les solutions de (4) sont de la forme :
  $y = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarques 3.6

- L'ensemble des solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2.
- On peut étendre ces résultats quand a, b, et $c \in \mathbb{C}$.

Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède une ou deux racines complexes et on obtient les résultats correspondants aux deux premiers points.

Exemples 3.7

3.2 Equations avec second membre de type exponentielle-polynôme

Définition 3.8

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre de type exponentielle-polynôme* toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
(5) $ay'' + by' + cy = f(x)$
où a, b et $c \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$) et f est une somme de fonctions de la forme $Q(x)e^{mx}$ où $m \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Remarque 3.9

Ce type de fonction f comprend les fonctions f trigonométriques et les produits de fonctions exponentielles par des fonctions cosinus ou sinus.

Méthode de résolution

De la même façon que les équations linéaires du premier ordre, si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (5) alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ (6)
D'où la méthode :

(i) On résout d'abord l'équation (6).

(ii) On détermine ensuite une solution particulière y_0 de (5).

(iii) Les solutions générales de (5) s'obtiennent en ajoutant les solutions de (6) et la solution particulière trouvée de (5).

Méthode pour déterminer la solution particulière de (5) :

- Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ alors une solution particulière de (5) est $y_0 = y_1 + y_2$ avec :
  y_1 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$
  y_2 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$
- Si $f(x) = Q(x)$ avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (5) est de la forme $y_0 = R(x)$ où R est un polynôme tel que :

$\deg R = n$ si $c \neq 0$,
$\deg R = n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
$\deg R = n+2$ si $c = 0$ et $b = 0$

• Si $f(x) = Q(x)e^{mx}$ avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (5) est de la forme $y_0 = R(x)e^{mx}$ avec :
$\deg R = n$ si m n'est pas racine du polynôme caractéristique.
$\deg R = n+1$ si m est une racine simple du polynôme caractéristique.
$\deg R = n+2$ si m est une racine double du polynôme caractéristique.

Remarque 3.10

Si nous avons l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ avec $f(x) = Q(x)$ alors on peut écrire $f(x) = Q(x)e^{0x}$.
On a $P = aX^2 + bX + c$.
• 0 n'est pas racine de $P \;\Rightarrow\; P(0) \neq 0 \;\Rightarrow\; c \neq 0$.
• 0 est racine simple de $P \;\Rightarrow\; P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0 \;\Rightarrow\; c = 0$ et $b \neq 0$.
En posant $t = y'$, on obtient une équation linéaire premier ordre.
• 0 est racine double de $P \;\Rightarrow\; P(0) = 0$ et $P'(0) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$ et $b = 0$.
L'équation est une équation simplifiée.

Exemples 3.11