Etude de fonctions

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ en entier.

1 Ensemble de définition

Rappel

Une fonction est la donnée de trois choses : un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et un moyen d'associer, à un élément du premier ensemble, un unique élément du deuxième que l'on appelle son *image*.

Remarques 1.1

Si $y = f(x)$, on dit que x est *un antécédent* de y.

Par exemple, si $f(x) = x^2$, les antécédents de $y = 1$ sont $x = -1$ et $x = 1$.

Attention : il y a au plus une image mais il peut y avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.
Cela entraîne les définitions suivantes :

- On dit qu'une fonction est une *application* si et seulement si tout élément de l'ensemble de départ possède (exactement) une image.
- On dit qu'une fonction est *surjective* si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.
- On dit qu'une fonction est *injective* si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent.
- On dit qu'une fonction est *bijective* si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit, si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède exactement un antécédent.

Définition 1.2

Parmi les éléments de l'ensemble de départ, l'ensemble formé par les éléments qui possèdent une image est appelé *ensemble de définition* de la fonction.

Remarque 1.3

Tout élément de l'ensemble de définition d'une fonction possède donc une et une seule image par celle-ci. Autrement dit, une fonction est une application sur son ensemble de définition.

Exemple 1.4

La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $f(x) = \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$ est définie sur $[0;4[\cup]4;+\infty[$ ensemble que l'on note D_f.

2 Courbe

Définition 2.1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit f une fonction définie sur I.
On appelle courbe représentative de la fonction f (sur I) et on note $\mathscr{C}_f$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme $(x, f(x))$ où x varie sur I.

Remarque 2.2

On dit aussi que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

3 Continuité

Définition 3.1

On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I : $\forall a \in I,\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^0(I)$) l'ensemble des applications continues sur I, à valeurs réelles.

Remarque 3.2

Si f est continue sur I, alors la restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur J.

Propriétés 3.3

On admettra que les fonctions suivantes sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition :

- Les fonctions polynômiales (entre autres les applications constantes et les applications affines).
- Les fonctions rationnelles (quotient de deux applications polynômiales).
- $x \mapsto \sqrt{x}$.
- $x \mapsto \sin x$.
- $x \mapsto \cos x$.
- $x \mapsto \tan x$.
- $x \mapsto \ln x$.
- $x \mapsto e^x$.
- $x \mapsto |x|$.

Propriété 3.4

Soient f et g deux applications continues sur I i.e. $\in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$). Alors :

- $\forall \alpha\beta \in \mathbb{R},\ \alpha f + \beta g$ est continue sur I.
- $f \times g$ est continue sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
- $|f|$ est continue sur I.

Exemple 3.5

$x \mapsto \dfrac{2e^x + 5\cos x - x\sin x}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3.6

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
Plus simplement dit, la composition de fonctions continues est une fonction continue.

Exemple 3.7

L'application définie par $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En effet, l'application $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]1, +\infty[$ et l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Théorème 3.8

Soit f une application continue sur l'intervalle I.
Soient a, b deux éléments de I $(a < b)$.
Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe un réel x, compris entre a et b, tel que $f(x) = y$.

Corollaire 3.9

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
Alors il existe c dans I, compris entre a et b, tel que $f(c) = 0$.

4 Ensemble de dérivabilité et fonction dérivée

Dans tout cette partie, f est une fonction définie sur I et a et b sont deux élément de I avec $a < b$.

Définition 4.1

On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b le quotient $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Définition 4.2

On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.
Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Exemple 4.3

Si $f(x) = x^2$ et $a = 3$ alors $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} x + 3 = 6$.

Propriété 4.4

Si $f'(a)$ existe, l'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Définition 4.5

On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

Définition 4.6

Si f est dérivable sur I, l'application qui, à tout x de I, associe son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et est notée f'.

Remarque 4.7

L'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Propriété 4.8

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque 4.9

La réciproque est fausse. Par exemple, $\sqrt{x}$ ou $|x|$.

Propriété 4.10

Si f et g sont dérivables sur I, alors $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.

Propriété 4.11

Si f et g sont dérivables sur I, alors $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f'g + g'f$.

Remarque 4.12

En particulier, avec les hypothèses de la propriété, si $g = \text{cste} = \lambda$, alors $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Propriété 4.13

Si f est dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

Corollaire 4.14

Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Propriété 4.15

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Exemple 4.16

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x}{x^4+2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + x \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1 \times (x^4+2) - x \times (4x^3)}{(x^4+2)^2}$.

Remarque 4.17

On définit par récurrence la dérivée n-ième d'une fonction par $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

On a aussi $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$.

On note souvent $f^{(2)} = f''$ et parfois $f^{(n)} = \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$.

Remarque 4.18

L'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I dont la dérivée n-ième est continue sur I est noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

En particulier, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I.

5 Variations

Dans tout cette partie, f est une fonction définie sur I et a et b sont deux élément de I avec $a < b$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Propriété 5.1

Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

i) f croissante sur $[a, b] \iff \forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0$.
ii) f décroissante sur $[a, b] \iff \forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0$.
iii) f constante sur $[a, b] \iff \forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0$.

Remarque 5.2

Attention : f strictement croissante $\not\Leftrightarrow \forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0$.
Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(0) = 0$.
Mais on a $(\forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0) \Rightarrow (f$ strictement croissante$)$.

Propriété 5.3

On suppose f dérivable sur I et soit x_0 un point intérieur à I.
Alors f admet un extremum relatif en x_0 si et seulement si f' s'annule ET change de signe en x_0.

Remarque 5.4

Attention : le fait que la dérivée s'annule n'est pas suffisant.
Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est strictement croissante et donc n'admet d'extremum en 0.
Et pourtant $f'(0) = 0$.

Définition 5.5

On dit que f est *convexe* sur I si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes sur I.
On dit que f est *concave* sur I si $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes sur I.

Définition 5.6

On dit que f admet un *point d'inflexion* en a si $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en a.

Propriété 5.7

Si f est dérivable sur I alors :
f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Propriété 5.8

f admet un *point d'inflexion* en a alors f passe de convexe à concave ou inversement en a.

Propriété 5.9

Si f est deux fois dérivable sur I alors :
f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.

Exemple 5.10

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$.
On a f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$.
Puisque $f''(x) \geq 0$, on a donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriété 5.11

Si f est deux fois dérivable sur I alors f admet un *point d'inflexion* en a si et seulement sif'' s'annule et change de signe en a.

Exemple 5.12

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x^2$.
On a f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$ et $f''(x) = 6x + 2$.
$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{3}$.
Donc f est convexe sur $\left]-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$ et f est concave sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{3}\right[$
De plus, f admet un point d'inflexion en $x = -\dfrac{1}{3}$.

6 Limite aux bornes et branches infinies

Dans tout cette partie, f et g sont des fonctions définies sur I.

Propriétés 6.1

Soit $n > 1$ un entier, on admet les limites suivantes :

- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair et $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair
- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0^-$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$
- $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Rappel

Voici les tableaux récapitulatifs des règles de composition dans limites.
On notera "$F.I.$" pour forme indéterminée lorsque la limite n'est pas connue directement.

Limite d'une somme :

$\lim f$ \ $\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I.$
$-\infty$	$-\infty$	$F.I.$	$-\infty$

Limite d'un produit :

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	$F.I.$	$F.I.$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un quotient :

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\ell < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^+	0^+	0^-	$F.I.$	$F.I.$	0^+	0^-
0^-	0^-	0^+	$F.I.$	$F.I.$	0^-	0^+
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$	$F.I.$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$	$F.I.$

Propriété 6.2

Soient a et b deux réels. On suppose $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $f(a) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$.
Dans ces conditions, on a $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Définition 6.3

On dit que f possède une branche infinie si et seulement si soit $\pm\infty$ fait partie des bornes de D_f soit il existe $a \in I$ tel que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Définition 6.4

S'il existe $a \in I$ tel que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à $\mathscr{C}_f$.

Définition 6.5

On dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote (horizontale) à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou de façon équivalente $\lim_{x \to +\infty} f(x) - b = 0$.

Remarque 6.6

On obtient une définition similaire en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Propriété 6.7

On suppose que $\lim_{x \to (\pm)\infty} f(x) = (\pm)\infty$.

(i) Si $\lim_{x \to (\pm)\infty} \dfrac{f(x)}{x} = (\pm)\infty$, on dit que f admet une branche parabolique dans la direction (Oy).

(ii) Si $\lim_{x \to (\pm)\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on dit que f admet une branche parabolique dans la direction (Ox).

(iii) Si $\lim_{x \to (\pm)\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a (\in \mathbb{R})$ et

   (a) si $\lim_{x \to (\pm)\infty} f(x) - ax = (\pm)\infty$, on dit que f admet une branche parabolique dans la direction de la droite D d'équation $y = ax$.

   (b) si $\lim_{x \to (\pm)\infty} f(x) - ax = b (\in \mathbb{R})$, on dit que la droite $D : y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Remarque 6.8

La droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$ en $(\pm)\infty$ signifie que $\lim_{x \to (\pm)\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ ou encore que l'on peut écrire f sous la forme $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to (\pm)\infty} \varepsilon(x) = 0$.