Fonction exponentielle

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Définitions et premières propriétés

Rappel

Définition 1.1

On appelle *fonction exponentielle* et on note exp la fonction réciproque de la fonction logarithme. Autrement dit, $\ln(y) = x \Leftrightarrow y = \exp(x)$.

Remarques 1.2

Rappel

Propriété 1.3

Pour tout réel x, on a $\exp(x) = e^x$.
En particulier, cela signifie que, pour tout réel strictement positif x, on a $e^{\ln x} = x$.

Propriété 1.4

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
- Plus généralement, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors e^u est dérivable sur I et, $\forall x \in I$, $(e^u)' = u' \times e^u$.

Exemples 1.5

Corollaire 1.6

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Corollaire 1.7

La fonction exponentielle est convexe.

Corollaire 1.8

Pour tous les réels x et y, on a :

(i) $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

(ii) $e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$

(iii) $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Remarque 1.9

On a donc $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$ et $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$.

Exemples 1.10

Propriété 1.11

Pour tous les réels a et b, on a :

(i) $e^{a+b} = e^a \times e^b$

(ii) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

(iii) $(e^a)^b = e^{ab}$

Remarque 1.12

En particulier :

(i) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

(ii) $\sqrt{e^a} = e^{\frac{1}{2}a}$

Exemples 1.13

Propriété 1.14

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Remarque 1.15

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

Remarque 1.16

En posant $f(x) = e^x$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

Propriété 1.17

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

2 Limites : croissances comparées

Propriétés 2.1

- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

- Pour tout entier non nul n, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

- Pour tous les réels a et b strictement positifs, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^a \left(e^x\right)^b = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(e^x\right)^b}{x^a} = +\infty$

Exemples 2.2

Rappel

Pour tous les réels a et b strictement positifs, on a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} |x|^a \left(\ln x\right)^b = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\ln x\right)^b}{x^a} = 0$

Remarque 2.3

3 Exponentielle de base a

Définition 3.1

Pour tout réel strictement positif a, on appelle *fonction exponentielle de base* a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp_a x = a^x = e^{x \ln a}$.

Exemple 3.2

Remarque 3.3

Il ne faut surtout pas confondre les fonctions puissances ($x \mapsto x^\alpha$) avec les fonctions exponentielles de base α ($x \mapsto \alpha^x$).

Propriété 3.4

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a^x)' = \ln(a) \times a^x$

Propriété 3.5

Soit a un réel strictement positif et soit $f : x \mapsto a^x$ la fonction exponentielle de base a.

- Si $0 < a < 1$ alors f est strictement décroissante.
- Si $a > 1$ alors f est strictement croissante.
- Si $a = 1$ alors f est constante (et égale à 1).

Propriétés 3.6

Soient x et y deux réels strictement positifs et soient a et b deux réels. On a :

(i) $x^a \times x^b = x^{a+b}$

(ii) $(x^a)^b = x^{a \times b}$

(iii) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

(iv) $\left(\dfrac{1}{y}\right)^a = \dfrac{1}{y^a}$

(v) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

Définition 3.7

Pout tout entier n et tout réel a positif, on appelle *racine n-ième de a* le nombre $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln a}$ qui vérifie donc $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.