Optimisation

Pour une matrice M carrée symétrique de taille n et pour $1 \leq k \leq n$, on note $|M|_k$ le mineur principal diagonal d'ordre k de M c'est-à-dire le déterminant de la matrice symétrique de taille k obtenue en éliminant les $n-k$ dernières lignes et colonnes de M. En particulier, $|M|_n = \det(M)$.

1 Optimisation sans contrainte d'une fonction f à $n = 2$ ou 3 variables

On a $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix}$ si $n = 2$ et $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{xz}(x,y,z) \\ f''_{yx}(x,y,z) & f''_{y^2}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{zx}(x,y,z) & f''_{zy}(x,y,z) & f''_{z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$ si $n = 3$.

- $n = 2$, pour tout point critique $A = (a,b)$ c'est-à-dire tout point tel que $f'_x(A) = f'_y(A) = 0$, on a :

  i si $\left|H_f(A)\right|_1 > 0$ et si $\left|H_f(A)\right|_2 > 0$ alors A est un minimum.

  ii si $\left|H_f(A)\right|_1 < 0$ et si $\left|H_f(A)\right|_2 > 0$ alors A est un maximum.

  iii A est un point de selle dans les autres cas.

- $n = 3$, pour tout point critique $A = (a,b,c)$ c'est-à-dire tout point tel que $f'_x(A) = f'_y(A) = f'_z(A) = 0$, on a :

  i si $\left|H_f(A)\right|_1$, $\left|H_f(A)\right|_2$ et $\left|H_f(A)\right|_3$ sont tous > 0 alors A est un minimum.

  ii si $\left|H_f(A)\right|_1$ et $\left|H_f(A)\right|_3$ sont < 0 et si $\left|H_f(A)\right|_2 > 0$ alors A est un maximum.

  iii A est un point de selle dans les autres cas.

2 Optimisation avec une contrainte g d'une fonction f à 2 variables

On pose $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.

La matrice hessienne bordée du Lagrangien est $\overline{H}_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda^2}(x,y,\lambda) & L''_{\lambda x}(x,y,\lambda) & L''_{\lambda y}(x,y,\lambda) \\ L''_{x\lambda}(x,y,\lambda) & L''_{x^2}(x,y,\lambda) & L''_{xy}(x,y,\lambda) \\ L''_{y\lambda}(x,y,\lambda) & L''_{yx}(x,y,\lambda) & L''_{y^2}(x,y,\lambda) \end{pmatrix}$.

Pour tout point critique $A = (a,b,c)$ de L c'est-à-dire tout point tel que $L'_x(A) = L'_y(A) = L'_\lambda(A) = 0$, on a :

i si $\left|\overline{H}_L(A)\right|_3 \left(= \det(\overline{H}_L(A))\right) < 0$ alors A est un minimum.

ii si $\left|\overline{H}_L(A)\right|_3 > 0$ alors A est un maximum.

3 Optimisation avec une contrainte g d'une fonction f à 3 variables

On pose $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$.

On a $\overline{H}_L(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda^2}(x,y,z,\lambda) & L''_{\lambda x}(x,y,z,\lambda) & L''_{\lambda y}(x,y,z,\lambda) & L''_{\lambda z}(x,y,z,\lambda) \\ L''_{x\lambda}(x,y,z,\lambda) & L''_{x^2}(x,y,z,\lambda) & L''_{xy}(x,y,z,\lambda) & L''_{xz}(x,y,z,\lambda) \\ L''_{y\lambda}(x,y,z,\lambda) & L''_{yx}(x,y,z,\lambda) & L''_{y^2}(x,y,z,\lambda) & L''_{yz}(x,y,z,\lambda) \\ L''_{z\lambda}(x,y,z,\lambda) & L''_{zx}(x,y,z,\lambda) & L''_{zy}(x,y,z,\lambda) & L''_{z^2}(x,y,z,\lambda) \end{pmatrix}$.

Pour tout point critique $A = (a,b,c,d)$ de L c'est-à-dire tout point tel que $L'_x(A) = L'_y(A) = L'_z(A) = L'_\lambda(A) = 0$, on a :

i si $\left|\overline{H}_L(A)\right|_3 < 0$ et $\left|\overline{H}_L(A)\right|_4 \left(= \det(\overline{H}_L(A))\right) < 0$ alors A est un minimum.

ii si $\left|\overline{H}_L(A)\right|_3 > 0$ et $\left|\overline{H}_L(A)\right|_4 < 0$ alors A est un maximum.