Intégration

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Primitives

Définition 1.1

Soit f une fonction définie sur I.
Une fonction F est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 1.2

Remarques 1.3

Pour pouvoir intégrer, il faut connaître quelques primitives usuelles.
Ce sont sensiblement les mêmes formules que pour la dérivation.

- Sur $\mathbb{R}$, les primitives de $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ sont de la forme $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$.
- Sur $]0; +\infty[$, pour tout réel k, les primitives de $f(x) = \dfrac{k}{\sqrt{x}}$ sont de la forme $F(x) = 2k\sqrt{x}$.
- Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$, les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sont de la forme $F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} = \dfrac{1}{(-n+1)}x^{-n+1}$.
- Sur $]0; +\infty[$, les primitives de $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) sont de la forme $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sont de la forme $F(x) = \ln x$.
- Sur $\mathbb{R}_-^*$, les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sont de la forme $F(x) = \ln(-x)$.
- Sur $\mathbb{R}$, les primitives de $f(x) = e^x$ sont de la forme $F(x) = e^x$.

Notation

On écrit $F = \displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$ pour exprimer que F est une primitive de f.

Propriété 1.4

Si f est une fonction continue sur I alors f possède des primitives sur I.

Remarque 1.5

A fortiori, si f est une fonction dérivable sur I alors f possède des primitives sur I.

Propriété 1.6

Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur I. Alors $F - G$ est une fonction constante.

Remarque 1.7

Autrement dit, si F et G deux primitives de f sur I alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$.
Cette constante c est appelée *constante d'intégration*.
Cela signifie que si l'on connaît une primitive de f alors on connaît toutes les primitives de f.

Exemple 1.8

Remarques 1.9

Propriété 1.10

Soit f une fonction dérivable sur I. Soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$.
Alors il existe une *unique* primitive F de f sur I vérifiant $F(a) = b$.

Exemple 1.11

On cherche *la* primitive de $f(x) = 6x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$ telle $F(1) = 4$.

Remarque 1.12

Rappel : C'est ainsi que l'on définit la fonction *logarithme népérien*.
En effet, la fonction ln est la primitive de la fonction (dite fonction inverse) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui vérifie $\ln 1 = 0$.
Autrement dit, $\forall x \in]0; +\infty[$, on a $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 1.13

Si F est une primitive d'une fonction f (sur I) et si u' est une dérivée d'une fonction u (sur J avec $u(J) \subset I$) alors $F(u)$ est une primitive de $u' \times f(u)$ (sur I).

Remarques 1.14

On utilise la propriété précédente via quelques formes usuelles.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier et soit u une fonction dérivable sur I et dont la dérivée est notée u'.

- Sur I, les primitives de $f(x) = u' \times u^n$ où $n \in \mathbb{N}$ sont de la forme $F(x) = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.
- Sur tout intervalle I où u ne s'annule pas, les primitives de $f(x) = \dfrac{u'}{u^n} = u' \times u^{-n}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
- Sur tout intervalle I où u est strictement positive, les primitives de $f(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ sont de la forme $F(x) = \sqrt{u}$.
- Sur tout intervalle I où u ne s'annule pas, les primitives de $f(x) = \dfrac{u'}{u}$ sont de la forme $F(x) = \ln|u|$.
- Sur I, les primitives de $f(x) = u' \times e^u$ sont de la forme $F(x) = e^u$.

2 Intégration sur un segment

Définition 2.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ et soit F une primitive de f sur $[a; b]$. On appelle *intégrale* de f de a à b, le nombre réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples 2.2

Remarques 2.3

- Le résultat de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f, alors il existe un réel k tel que $G = F+k$ et donc $G(b)-G(a) = F(b)+k-(F(a)-k) = F(b)-F(a)$.

- $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Définition 2.4

On dit qu'une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue *par morceaux* sur $[a;b]$ si f est continue en tout point de $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points. De plus, il faut qu'en ces points f admette une limite finie à gauche et à droite.

Exemple 2.5

Soient k et ℓ deux réels et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + k & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ \dfrac{1}{x} + \ell & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Remarque 2.6

Une fonction continue est continue par morceaux.

Définition 2.7

Soient $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ des réels.
Soit f une fonction continue (ou prolongeable par continuité) sur chacun des intervalles $[x_i; x_{i+1}]$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2.8

3 Propriétés de l'intégrale

Dans toute cette partie, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et f, g sont deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a;b]$

Théorème 3.1

Pour tout réel c de l'intervalle $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Propriété 3.2

Soient λ et μ deux réels.
Alors $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a;b]$ et $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 3.3

Si, $\forall t \in [a;b]$, on a $f(t) \geq 0$ (on dit que f est positive sur $[a;b]$), alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Corollaire 3.4

Si $\forall t \in [a;b]$ $f(t) \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 3.5

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Propriété 3.6

Si f est positive et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f(t) = 0\ \forall t \in [a;b]$ (on dit que f est nulle sur $[a;b]$).

4 Techniques de calcul

Propriété 4.1

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$
On dit que l'on a fait une *intégration par partie.*

Exemple 4.2

Propriété 4.3

Soit f une fonction intégrable sur $[a;b]$ et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ avec $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a;b]$.
Alors on a : $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) \times f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$
On dit que l'on a fait un *changement de variable.*

Exemples 4.4

5 Intégrales généralisées

Définition 5.1

On appelle *intégrale généralisée* ou *intégrale impropre* une intégrale du type $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où $a = -\infty$, $b = +\infty$ ou alors f n'est pas continue en a ou b.

5.1 Intégrales sur un intervalle du type $[c;+\infty[$ ou $]-\infty;c]$

Définition 5.2

Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $f : [c;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que *l'intégrale* $\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente* si la fonction $x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
On pose alors : $\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est *divergente.*

Exemple 5.3

Définition 5.4

Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $f :]\infty;c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que *l'intégrale* $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente* si la fonction $x \mapsto \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $-\infty$.
On pose alors : $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to -\infty} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 5.5

5.2 Intégrales sur $\mathbb{R}$

Définition 5.6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et soit c un réel.
Si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes alors l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque 5.7

Exemple 5.8

5.3 Intégrales sur un intervalle du type $[a;b[$ ou $]a;b]$

Définition 5.9

Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$.
Si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on pose $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
Si f est continue par morceaux sur $]a;b]$, on définit de façon identique $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a} \int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples 5.10