Les indices

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Introduction

On peut synthétiser une série statistique par sa moyenne, son écart-type ou encore par une représentation graphique.
Mais, si on dispose de plusieurs séries de grandeurs élémentaires (en général des séries de prix ou des séries de quantités de biens), comment fait-on pour les résumer en une seule grandeur?

Exemple 1.1

Prix en euros	2013	2014	2015	2016	2017
Oranges (kg)	2	2.3	2.5	2.7	2.9
Télévisions (unité)	300	320	280	275	290
Electricité (KW par heure)	3	3.5	2.2	3.2	3.4

Comment fait-on pour calculer un prix moyen agrégé pour ces trois biens?
Est-ce que l'on peut estimer son évolution?

Pour répondre à ses questions, on dispose d'indicateurs (appelés *indices élémentaires*) qui permettent de faciliter la lecture de l'évolution des séries dans l'espace et le temps. On trouve également d'autres indicateurs (appelés *indices synthétiques*) permettant de décrire l'évolution d'une grandeur agrégée à partir de grandeurs simples.

2 Les indices élémentaires

Définition 2.1

Un *indice élémentaire* est un rapport entre deux valeurs d'une série à deux dates ou deux espaces différents. On note $I_{c/r} = 100 \times \frac{V_c}{V_r}$.
Où Vc est une valeur dite courante qui est observée à une date donnée ou dans un espace donné.
Et Vr est une valeur de référence à une date de référence r ou un espace de référence r.

Remarque 2.2

Exemples 2.3

Propriété 2.4

Un indice à la date t exprimé par rapport à une année de référence t', peut être décomposé en plusieurs indices élémentaires à des dates successives (ou à des dates intermédiaires) de la façon suivante :

$$I_{t/t'} = 100 \times \left[\frac{I_{t/t-1}}{100} \times \frac{I_{t-1/t-2}}{100} \times \ldots \times \frac{I_{t'+1/t'}}{100} \right].$$

Remarque 2.5

Exemple 2.6

On considère le P.I.B. par habitant en France avec les données suivantes :

Année	Indice (base 100 en 1994)
1994	100
2004	130
2014	145

Remarque 2.7

Donc, dès lors que nous observons des indices intermédiaires sur la période considérée nous pouvons en déduire un indice global. On dit alors que les indices élémentaires sont *enchaînables*.

Propriété 2.8

Avec les notations de la définition 2.1, quand on inverse le rôle de la base de référence et celle de la valeur courante, l'indice élémentaire s'inverse à 10^4 près : $I_{r/c} = 10^4 \times \dfrac{1}{I_{c/r}}$

Exemple 2.9

Le revenu moyen des habitants de Tours exprimé en indice par rapport à celui des habitants de Rennes est de 125 en 2014.
On cherche celui des habitants de Rennes exprimé par rapport à ceux de Tours la même année.

Propriété 2.10

Avec les notations de la définition 2.1, si $V_t = U_t \times W_t$ pour $t = c$ et pour $t = r$, alors :

$$I_{c/r}(V) = \frac{1}{100} \times I_{c/r}(U) \times I_{c/r}(W)$$

Exemple 2.11

On suppose que le nombre de maisons par habitant est plus élevé de 40% dans la région PACA que dans la région Ile de France et que le prix moyen de l'habitation est de 60% plus élevé entre les deux respectivement. On cherche la valeur du patrimoine immobilier par habitant dans la région PACA exprimé par rapport à celui d'Ile et France (en indice).

Propriété 2.12

Avec les notations de la définition 2.1, si $V_t = \dfrac{U_t}{W_t}$ pour $t = c$ et pour $t = r$, alors :

$$I_{c/r}(V) = 100 \times \frac{I_{c/r}(U)}{I_{c/r}(W)}$$

3 Les indices synthétiques

Principe

Dans les statistiques en économie, on observe des évolutions de prix, de quantités et des recettes de ventes pour beaucoup de biens.
La production d'une économie est composée de nombreux biens comme, par exemple, le café, le blé, l'acier ou encore l'électricité.
Ainsi, un indice des prix à la production de toute une économie (indice agrégé) sera une grandeur composite représentant les prix des biens tels que celui d'un kilo de café, celui d'une tonne de blé, celui d'une tonne d'acier et celui d'un kilo-Watt/heure.
Avec les quantités de chacuns des biens, on peut alors calculer un prix synthétique moyen.
On cherche de la même manière à calculer une quantité synthétique moyenne (un indicateur) d'évolution, mais sans ajouter des kilos de café avec des tonnes d'acier.

Définition 3.1

Un *indice synthétique* est une grandeur composite qui résume un ensemble d'indices simples basés sur des grandeurs hétérogènes (i.e. ne pouvant pas être additionnées).

Exemple 3.2

Bien \ Recettes	Année t_0	Année t	Indice des prix
Vin	300 millions	330 millions	125
Poulet	100 millions	115 millions	130
Champignon	10 millions	22 millions	140

Définition 3.3

L'indice de Paasche des prix est $\Delta P_P = 100 \times \dfrac{\sum\limits_i p_{t;i} \times q_{t;i}}{\sum\limits_i p_{0;i} \times q_{t;i}}$.

L'indice de Paasche des quantités est $\Delta Q_P = 100 \times \dfrac{\sum\limits_i p_{t;i} \times q_{t;i}}{\sum\limits_i p_{t;i} \times q_{0;i}}$.

Où $p_{0,i}$ et $p_{t,i}$ sont les prix respectivement des années 0 et t du produit i et $q_{0,i}$ et $q_{t,i}$ sont les quantités du même produit les mêmes années.

Remarque 3.4

Définition 3.5

On utilise les mêmes notations que dans la définition 3.3.

L'indice Laspeyres des prix est $\Delta P_L = 100 \times \dfrac{\sum\limits_i p_{t;i} \times q_{0;i}}{\sum\limits_i p_{0;i} \times q_{0;i}}$.

L'indice Laspeyres-quantités est $\Delta Q_L = 100 \times \dfrac{\sum\limits_i p_{0;i} \times q_{t;i}}{\sum\limits_i p_{0;i} \times q_{0;i}}$

Remarques 3.6

Exemple 3.7

On cherche à calculer un indice des prix agrégé des trois produits suivants. Les prix sont donnés unitairement par rapport aux quantités.

	Blé		Mais		Sucre	
dates	prix	quantités	prix	quantité	prix	quantité
2014	15	50	5	40	2	20
2015	20	55	8	35	3	25
2016	25	58	10	30	4	28

Remarque 3.8

La moyenne arithmétique pondérée des indices élémentaires par les recettes donne l'indice de Lapeyres des prix.

En effet, à une date T, les recettes d'un produit i peuvent s'écrire $R_{i,T} = p_{i,T} \times q_{i,T}$.

De plus, l'indice $I_{i,t/0}(p)$ des prix du produit i vaut $\dfrac{p_{i,t}}{p_{i,0}}$.

On a donc $100 \times \dfrac{\sum_i R_{i,0} \times I_{i,t/0}(p)}{\sum_i R_{i,0}} = 100 \times \dfrac{\sum_i (p_{i,0}\times q_{i,0}) \left(\dfrac{p_{i,t}}{p_{i,0}}\right)}{\sum_i (p_{i,0}\times q_{i,0})} = 100 \times \dfrac{\sum (p_{i,t} \times q_{i,0})}{\sum_i (p_{i,0} \times q_{i,0})}$.

Remarque 3.9

L'indice de Paasche correspond à une moyenne harmonique des indices élémentaires :

$$\left[\frac{\sum_i R_{i,t}\,[I_{i,t}(p)]^{-1}}{\sum_i R_{i,t}}\right]^{-1} = 100 \times \frac{\sum_i R_{i,t}}{\sum_i \dfrac{R_{i,t}}{\left(\dfrac{p_{i,t}}{p_{i,0}}\right)}} = 100 \times \frac{\sum_i p_{i,t} \times q_{i,t}}{\sum_i \dfrac{p_{i,t} \times q_{i,t}}{\left(\dfrac{p_{i,t}}{p_{i,0}}\right)}} = 100 \times \frac{\sum_i (p_{i,t} \times q_{i,t})}{\sum_i (p_{i,0} \times q_{i,t})}$$

En conséquence, l'indice de Paasche est toujours inférieur à l'indice de Lapeyres.

Définition 3.10

L'indice de Fisher des prix est la moyenne géométrique de ceux de Paasche et Lapeyres. De même pour l'indice de Fisher des quantités. On a donc :
$\Delta P_F(t/0) = \sqrt{\Delta P_L(t/0) \times \Delta P_P(t/0)}$ et $\Delta Q_F(t/0) = \sqrt{\Delta Q_L(t/0) \times \Delta Q_P(t/0)}$.

Remarque 3.11

Comme il s'agit d'une moyenne alors : $\Delta P_P(t/0) \leq \Delta P_F(t/0) \leq \Delta P_L(t/0)$.

Propriété 3.12

$\Delta P_L(t/0) = \dfrac{10^4}{\Delta P_P(0/t)}$.

Propriété 3.13

$\Delta P_F(t/0) = \dfrac{10^4}{\Delta P_F(0/t)}$.