Matrices et déterminants

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, n, p et q sont trois entiers naturels non nuls et K est un corps commutatif. En pratique, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices

Définition 1.1

La donnée de np éléments de K rangés dans un tableau à n lignes et p colonnes est appelée une matrice $n \times p$ à coefficients dans K.

Exemples 1.2

Remarques 1.3

• Pour séparer les valeurs dans une matrice, on laisse juste un espace.
Il faudra donc faire attention.

• On pourra aussi noter une matrice avec des crochets.
Toute autre notation est interdite : ni accolade, ni barre qui ont d'autres significations.

• On repère les éléments d'une matrice grâce à leur indice de ligne et leur indice de colonne.

De façon générale, une matrice $n \times p$ s'écrit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$.

Notation

L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans K se note $\mathscr{M}_{np}(K)$.

Définition 1.4

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n'j=1,p'}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n'p'}(K)$ où $n', p' \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A = B$ si et seulement si $\begin{cases} n = n' \\ p = p' \\ a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, n \ \forall j = 1, p \end{cases}$.

Exemple 1.5

Définitions 1.6

On dit que $A = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p} \in \mathscr{M}_{np}(K)$ est :

- une matrice ligne si et seulement si $n = 1$.
- une matrice colonne si et seulement si $p = 1$.
- une matrice carrée si et seulement si $n = p$.
- une matrice diagonale si et seulement si A est une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- une matrice scalaire si et seulement si A est une matrice diagonale telle que $a_{ii} = a_{jj}$.
- une matrice unité si et seulement si A est une matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1$.
- une matrice triangulaire supérieure ssi A est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
- une matrice triangulaire inférieure ssi A est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
- une matrice échelonnée ssi A est une matrice telle que le nombre de zéros lus de gauche à droite avant le premier terme non nul (s'il existe) augmente à chaque ligne.

Remarques 1.7

- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n (c'est-à-dire des matrices $n \times n$) à coefficients dans K est noté $\mathscr{M}_n(K)$.
- On identifie les éléments suivants :

Les matrices colonnes et les vecteurs colonnes c'est-à-dire $\mathscr{M}_{n1}(K)$ et K^n.
Les matrices lignes et les vecteurs lignes c'est-à-dire $\mathscr{M}_{1p}(K)$ et K^p.
Les matrices carrées d'ordre 1 et les éléments de K c'est-à-dire $\mathscr{M}_1(K)$ et K.

Définition 1.8

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On appelle vecteur colonne de A, toute colonne extraite de A identifiée à un vecteur de K^n.
On appelle vecteur ligne de A, toute ligne extraite de A identifiée à un vecteur de K^p.

Exemple 1.9

Définition 1.10

On appelle opération élémentaire sur les lignes $(L_i)_{i=1,n}$ d'une matrice M de $\mathscr{M}_{np}(K)$ l'une des opérations suivantes :
- échanger la i-ème ligne avec la j-ème qui est noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplier la i-ème ligne par un scalaire a non nul qui est noté $L_i \leftarrow aL_i$
- ajouter la j-ème ligne à la i-ème ligne qui est noté $L_i \leftarrow L_i + L_j$

Remarque 1.11

On peut, en particulier, remplacer la i-ème ligne par la somme d'un multiple non nul d'elle-même et d'un multiple de la j-ème ligne : $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ (avec $a \neq 0$).

Définition 1.12

On appelle rang d'une matrice M le nombre de vecteurs lignes non nuls de toute matrice échelonnée obtenue à partir de M par des opérations élémentaires sur les lignes.

Exemples 1.13

Propriété 1.14

Pour toute matrice M, on a $\mathrm{rg}\,({}^tM) = \mathrm{rg}\,(M)$ (la définition de ${}^tM$ est donnée dans la suite).

Définition 1.15

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On définit la loi + sur $\mathscr{M}_{np}(K)$ par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,nj=1,p}$.

Exemples 1.16

Remarques 1.17

- Autrement dit, l'addition est définie par $(a_{ij})_{i=1,nj=1,p} + (b_{ij})_{i=1,nj=1,p} = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,nj=1,p}$.
- On ne peut pas additionner un réel et une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ avec $n \geq 2$ ou $p \geq 2$.
- On appelle matrice nulle de $\mathscr{M}_{np}(K)$ la matrice $n \times p$ composée uniquement de 0.

Elle est simplement notée 0.

Propriété 1.18

$\mathscr{M}_{np}(K)$ vérifie les 5 propriétés suivantes : $\forall A, B$ et $C \in \mathscr{M}_{np}(K)$,

(i) $A + B \in \mathscr{M}_{np}(K)$.

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(iii) $A + 0 = 0 + A = A$.

(iv) $\exists \tilde{A} \in \mathscr{M}_{np}(K)$ / $A + \tilde{A} = \tilde{A} + A = 0$. On **note** $-A$ cette matrice $\tilde{A}$.

(v) $A + B = B + A$.

On dit que $(\mathscr{M}_{np}(K), +)$ est un groupe abélien

Remarques 1.19

- Si $A = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$, on a $-A = (-a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$.
- On peut définir $A - B$ par $A + (-B)$.

Définition 1.20

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et soit $\ell \in K$.
On définit la loi externe "." sur $\mathscr{M}_{np}(K)$ à domaine d'opérateurs K par $\ell.A = (\ell \times a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$.

Exemples 1.21

Remarques 1.22

- Autrement dit : $\ell.(a_{ij})_{i=1,nj=1,p} = (\ell \times a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$.
- La loi "." n'est généralement pas notée.
- $(-1).A = -A$ et $0.A = 0$.
- En particulier, on a : $(\ell + m).A = \ell.A + m.A$ et $\ell.(A + B) = \ell.A + \ell.B$.

Définition 1.23

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et soit $B = (b_{ij})_{i=1,pj=1,q}$ une matrice de $\mathscr{M}_{pq}(K)$.
On appelle produit de A par B et on note $A \times B$ la matrice de $\mathscr{M}_{nq}(K)$ définie par :

$A \times B = (c_{ij})_{i=1,nj=1,q}$ où $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Exemples 1.24

Remarques 1.25

- Pour pouvoir multiplier la matrice A par la matrice B, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- On ne peut pas multiplier B par A dans l'exemple 1.24.
- Si $A \in \mathscr{M}_{np}(K)$, on peut calculer à la fois $A \times B$ et $B \times A$ que si $B \in \mathscr{M}_{pn}(K)$.

Dans ce cas, $A \times B \in \mathscr{M}_{n}(K)$ et $B \times A \in \mathscr{M}_{p}(K)$.

- La loi $\times$ n'est une loi de composition interne que dans un ensemble de matrices carrées de même taille.

Propriété 1.26

Soient $k \in K$, A une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et B une matrice de $\mathscr{M}_{pq}(K)$.
On a : $k.(A \times B) = (k.A) \times B = A \times (k.B)$.

Exemple 1.27

Propriété 1.28

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ c'est-à-dire : $\forall A, B$ et $C \in \mathscr{M}_n(K)$,
$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ et
$(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$.

Exemple 1.29

Propriété 1.30

$(\mathscr{M}_n(K), \times)$ vérifie les 3 propriétés suivantes : $\forall A, B$ et $C \in \mathscr{M}_n(K)$,

(i) $A \times B \in \mathscr{M}_n(K)$.

(ii) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

(iii) $\exists I_n \in \mathscr{M}_n(K)$ / $\forall A \in \mathscr{M}_n(K)$, $A \times I_n = I_n \times A = A$.

On dit que $(\mathscr{M}_n(K), \times)$ est un monoïde.

Remarque 1.31

Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Exemple 1.32

Remarque 1.33

Toutefois, il arrive parfois que deux matrices commutent c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on multiplie ces deux matrices n'intervient pas dans le résultat.
Par exemple, la matrice identité I_n commute avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1.34

Les puissances entières positives d'une matrice carrée A sont définies par :
$A^0 = I$, $A^1 = A$ et $A^n = \underbrace{A \times A \times .... \times A}_{n\,\text{fois}}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Exemple 1.35

Définition 1.36

On appelle diagonale d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ de $\mathscr{M}_n(K)$ l'ensemble des coefficients de la forme a_{ii} où $i = 1, n$.

Définition 1.37

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathscr{M}_{pn}(K)$ définie par ${}^tA = (\alpha_{ij})_{i=1,pj=1,n}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}$ $\forall i = 1, p$ et $\forall j = 1, n$.

Exemples 1.38

Remarques 1.39

• Lorsque l'on transpose une matrice, les vecteurs colonnes de celle-ci sont changés en vecteurs lignes et inversement.
• Lorsque l'on transpose une matrice carrée, les éléments diagonaux (ceux qui appartiennent à la diagonale) sont inchangés.

Propriété 1.40

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et soit $\ell \in K$. Alors on a :

(i) ${}^t({}^tA) = A$

(ii) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(iii) ${}^t(\ell A) = \ell({}^tA)$

Propriété 1.41

Soient A une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et B une matrice de $\mathscr{M}_{pq}(K)$. On a ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Remarque 1.42

Puisque ${}^tB$ est une matrice de $\mathscr{M}_{qp}(K)$ et ${}^tA$ est une matrice de $\mathscr{M}_{pn}(K)$, ${}^tB \times {}^tA$ est une matrice de $\mathscr{M}_{qn}(K)$.

Définition 1.43

Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(K)$.
On dit que A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.
On dit que A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

Exemples 1.44

Remarque 1.45

La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Définition 1.46

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K (i.e. $A \in \mathscr{M}_n(K)$).
On appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}\,(A)$ la somme des éléments diagonaux de A.
C'est-à-dire, si $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, on a $\mathrm{tr}\,(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemple 1.47

Propriétés 1.48

Soient A et B deux matrices carrées de même ordre et ℓ un scalaire.

(i) $\mathrm{tr}\,({}^tA) = \mathrm{tr}\,(A)$.

(ii) $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$.

(iii) $\mathrm{tr}\,(\ell.A) = \ell \times \mathrm{tr}\,(A)$.

(iv) $\mathrm{tr}\,(A \times B) = \mathrm{tr}\,(B \times A)$.

Remarques 1.49

En général, $\mathrm{tr}\,(A \times B) \neq \mathrm{tr}\,(A) \times \mathrm{tr}\,(B)$.

2 Matrice et inverse

Définition 2.1

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$.
On dit que A est inversible si et seulement s'il existe une matrice $\tilde{A}$ telle que $A \times \tilde{A} = \tilde{A} \times A = I_n$.
La matrice $\tilde{A}$ est appelée matrice inverse de A ou simplement inverse de A et est notée A^{-1}.

Remarque 2.2

Il y a unicité de la matrice inverse $\tilde{A}(= A^{-1})$ lorsqu'elle existe.

Exemples 2.3

Propriété 2.4

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(K)$. On a :

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(iii) $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Définition 2.5

Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(K)$.
On étend la définition de A^k pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ en posant $A^k = (A^{-1})^{-k}$ si $k < 0$.

Exemple 2.6

Propriété 2.7

Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(K)$ et soit $p, q \in \mathbb{N}$.
On a : $A^p \times A^q = A^{p+q}$ et $(A^p)^q = A^{p\times q}$
De plus, ces égalités sont vraies pour $p, q \in \mathbb{Z}$ si A est inversible.

Exemple 2.8

3 Déterminants

3.1 Méthode élémentaire de calcul des déterminants 2×2 et 3×3

Définition 3.1

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Exemples 3.2

Remarque 3.3

Une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contient 4 réels. Un déterminant est un (seul) réel.
On ne confondra donc pas $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$.

Définition 3.4

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

Remarque 3.5

De même que pour les matrices 2×2, une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ contient 9 réels. Son déterminant est un (seul) réel. On ne confondra donc pas $\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}$.

Exemple 3.6

Remarque 3.7

On peut "développer" un déterminant 3×3 suivant n'importe quelle ligne ou colonne.
Pour cela, deux choses sont importantes le damier de signes et la réduction de la matrice.

Le damier de signes est toujours $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$.

Une fois une colonne ou une ligne choisie, on multiplie chaque coefficient par son signe dans le damier et par le déterminant obtenu en supprimant la ligne et la colonne du coefficient.
Si on développe par rapport à la première colonne une matrice 3×3, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \times \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \times \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

Exemple 3.8

Remarque 3.9

On définit de manière récursive le déterminant d'une matrice $n \times n$ en utilisant la grille de signes suivante :

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \end{matrix}$$

Il suffit de développer le déterminant suivant une ligne ou une colonne.
Par exemple, si on développe un déterminant 4×4 par rapport à la première colonne, cela donne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \times \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \times \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - m \times \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

Exemple 3.10

3.2 Simplification

Propriété 3.11

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et soient $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes (resp. $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes) de A.

(i) Soit B est la matrice obtenue à partir de A en multipliant l'une des C_i (resp. L_i) par un réel k alors $\det(B) = k\det(A)$.

(ii) Soit B est la matrice obtenue à partir de A en échangeant deux C_i (resp. L_i) alors $\det(B) = -\det(A)$.

(iii) Soit B est la matrice obtenue à partir de A en additionnant à l'une des C_i (resp. L_i) une combinaison linéaire des autres alors $\det(B) = \det(A)$.

Exemples 3.12

Remarques 3.13

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$.
• Si l'une des colonnes (resp. lignes) de A est nulle alors $\det(A) = 0$.
• Si l'une des colonnes (resp. lignes) de A est une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) alors $\det(A) = 0$.
• Le déterminant d'une matrice triangulaire ou d'une matrice diagonale est égale au produit des éléments diagonaux.

Propriété 3.14

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

(i) A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

(ii) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Propriété 3.15

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$.

(i) $\det(A) = \det({}^tA)$.

(ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(iii) Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$.

4 Méthodes pratiques d'inversion d'une matrice 3×3

4.1 Méthode 1

Propriété 4.1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et, dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 4.2

Définition 4.3

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$, avec $n \geq 2$, de terme général a_{ij}.
$\forall i, j = 1, n$, soit $A_{i,j}$ la matrice obtenue de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
On appelle mineur de a_{ij} dans A le déterminant $\det(A_{i,j})$. La quantité $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ est appelée cofacteur du coefficient a_{ij}.
On appelle comatrice de A et on note $\operatorname{Com}(A)$ la matrice carrée d'ordre n et de terme général α_{ij}.

Remarque 4.4

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

Propriété 4.5

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ où $n \geq 2$. Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{Com}\,(A))$.

Exemple 4.6

4.2 Méthode 2

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
Rappel : On appelle opération élémentaire sur les lignes $(L_i)_{i=1,n}$ d'une matrice M l'une des opérations suivantes :
- échanger la i-ème ligne avec la j-ème qui est noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplier la i-ème ligne par un scalaire a non nul qui est noté $L_i \leftarrow aL_i$
- ajouter la j-ème ligne à la i-ème ligne qui est noté $L_i \leftarrow L_i + L_j$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. On cherche donc $\tilde{A}$ telle que $A \times \tilde{A} = \tilde{A} \times A = I$.
On suppose que l'on a vérifié que A est inversible.
On va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice composée de la juxtaposition de A et de I_3. Le but est d'obtenir une inversion de la position de la matrice I_3. Celle-ci se trouve à droite à la première étape et à gauche à la dernière étape. Lorsque l'on a effectué ce changement à l'aide des opérations élémentaires, il suffit de lire la matrice inverse.
On pose donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Systèmes d'équations linéaires

Définition 5.1

On appelle système d'équations linéaires un système du type : (1) $\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$

où les $(a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ et les $(b_j)_{j=1,n}$ sont des éléments d'un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous) et les $(x_i)_{i=1,p}$ des inconnues.

Propriété 5.2

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Le système (1) correspond à l'équation matricielle $AX = B$.

Exemple 5.3

5.1 Méthode par inversion de matrice

Propriété 5.4

Le système (1) possède une unique solution si $n = p$ et A est inversible. On dit alors que c'est un système de Cramer. Dans ce cas, l'équation $AX = B$ est alors équivalente à $X = A^{-1} \times B$.

Exemple 5.5

5.2 Méthode de Cramer

Propriété 5.6

Soit A_k la matrice obtenue en remplaçant la k-ième colonne de la matrice A du système (1) par B. Si le système (1) est un système de Cramer, on obtient sa solution en calculant pour tout $i = 1, p$, $\dfrac{\det A_i}{\det A}$ qui est la valeur solution de x_i.

Remarque 5.7

En terme de calculs, la méthode n'est guère efficace à partir de quatre équations. Néanmoins, elle a l'avantage de fournir explicitement une solution et s'applique dans des systèmes où les coefficients dépendent d'un ou plusieurs paramètres.

Exemple 5.8