Propriétés des réels

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Préliminaires

Notation

Signification des symboles usuels en mathématiques :

- $\in$ signifie "appartient" et $\notin$ signifie "n'appartient pas".
- $\forall$ signifie "Pour tout" ou "quel que soit".
- $\exists$ signifie "Il existe".
- $\exists!$ signifie "Il existe un et un seul".
- / et | signifient "tel que".
- $\Leftrightarrow$ signifie "si et seulement si".
- $\Rightarrow$ signifie "implique" que l'on peut traduire par un "si ... alors ...".
- { et } sont les délimiteurs d'un ensemble et le premier se lit "ensemble des".

Rappel

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels c'est-à-dire $\{0; 1; 2; 3; ....\}$. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs c'est-à-dire $\{....; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ....\}$. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels c'est-à-dire les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers relatifs.
On a $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$ ou encore $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}$ et $\exists b \in \mathbb{Z}^* \,/\, x = \dfrac{a}{b}$.

Remarques 1.1

- $\dfrac{\pi}{4}$ n'est pas un rationnel.
- L'écriture décimale d'un rationnel est la suite de termes obtenue si l'on effectuait la division.
- Il existe aussi l'ensemble des décimaux noté $\mathbb{D}$ qui est l'ensemble des rationnels dont le dénominateur est une puissance entière de 10.
- Une règle veut que l'on ne conserve jamais un signe '$-$' au dénominateur d'une fraction.

Autrement dit, on peut définir $\mathbb{Q}$ par $\left\{ \dfrac{p}{q} \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Propriété 1.2

Le reste de la division euclidienne par un entier non nul p est compris entre 0 et $p - 1$.

Exemples 1.3

- Soit $x = \dfrac{62}{55}$. Si l'on effectue la division, on obtient $x = 1,1272727...$ On utilise la notation $x = 1,1\overline{27}$ pour exprimer le fait que 27 se répète à l'infini.
- Pour retrouver une écriture fractionnaire d'un rationnel $y = 0,\overline{534}$, on peut utiliser le raisonnement suivant :

Puisque $y = 0,534534534...$, on a $1000y = 534,534534534...$
D'où $999y = 534$ et donc $y = \dfrac{534}{999}$.

Propriété 1.4

$x \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; x$ admet une écriture décimale finie ou infinie périodique.

Remarques 1.5

- $3 \times 0,\overline{33} = 0,\overline{99}$???
- Problèmes n'ayant pas de solution dans les ensembles précédents :
  - Par combien doit-on multiplier la longueur du coté d'un carré si l'on veut que sa surface soit multiplier par 2?
  - Constructibilité à la règle et au compas.
  - Quadrature du cercle.

D'où la création de $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R} = \{\text{rationnels}\} \cup \{\text{irrationnels}\}$.
- Exemples d'irrationnels : $\sqrt{2}$, e, π ...
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2 Equations

Propriétés 2.1

1. La loi $+$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$: si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $x + y \in \mathbb{R}$.
2. La loi $+$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\; x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. La loi $+$ admet un élément neutre (unique) : $\forall x \in \mathbb{R},\; x + 0 = 0 + x = x$.
4. Tout élément de $\mathbb{R}$ admet un symétrique (unique) pour la loi $+$:
   $\forall x \in \mathbb{R},\; \exists x' \in \mathbb{R} \,/\, x + x' = x' + x = 0$.
   Ce symétrique est appelé opposé et est noté $-x$.
   On définit la soustraction par $x - y = x + (-y)$.
5. La loi $+$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\; x + y = y + x$.
6. La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$: si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $x \times y \in \mathbb{R}$
7. La loi $\times$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\; x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.
8. La loi $\times$ admet un élément neutre (unique) : $\forall x \in \mathbb{R},\; x \times 1 = 1 \times x = x$.
9. La loi $\times$ est distributive à gauche et à droite par rapport à la loi $+$:
   $$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} x \times (y + z) &= x \times y + x \times z. \\ (y + z) \times x &= y \times x + z \times x. \end{aligned}$$
10. Tout élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ admet un symétrique (unique) pour la loi $\times$:
    $\forall x \in \mathbb{R},\; \exists x' \in \mathbb{R} \,/\, x \times x' = x' \times x = 1$.
    Ce symétrique est appelé inverse et est noté x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$.
    On définit la division par $x \div y = x \times \dfrac{1}{y}$.
11. La loi $\times$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\; x \times y = y \times x$.

On dit que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif.

Remarque 2.2

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$ (que nous verrons plus tard pour ceux qui ne connaissent pas) vérifient les 11 mêmes propriétés et possèdent donc aussi une structure de corps commutatif.

Propriété 2.3

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Il existe un unique $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $b^n = a$.
Le nombre b est appelé la racine $n^{\text{ième}}$ de a et est notée $\sqrt[n]{a}$ ou $\sqrt{a}$ lorsque $n = 2$.

Propriétés 2.4

1. La relation $=$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x = x$.
2. La relation $=$ est symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x = y$ alors $y = x$.
3. La relation $=$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x = y$ et si $y = z$ alors $x = z$.
4. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1 = y_1$ et si $x_2 = y_2$ alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.
5. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1 = y_1$ et si $x_2 = y_2$ alors $x_1 \times x_2 = y_1 \times y_2$.

Remarque 2.5

Les réciproques des deux dernières propriétés sont fausses.
En effet, $2 + 3 = 1 + 4$ et $3 \times 0 = 2 \times 0$.

Exemples 2.6

Comment résoudre des équations "simples" dans $\mathbb{R}$?
- $x - 4 = 7 \Leftrightarrow x - 4 + 4 = 7 + 4 \Leftrightarrow x = 11$
- $x + 5 = \sqrt{2} \Leftrightarrow x + 5 + (-5) = \sqrt{2} + (-5) \Leftrightarrow x = -5 + \sqrt{2}$
- $4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 4x \times \dfrac{1}{4} = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
- $3x + 1 = -2 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

Notation

- Pour tout entier $n \geq 2$, on note nx la somme de n répétitions de x. Autrement dit, $nx = \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ fois}}$.

Par convention, $1x = x$ et $0x = 0$.
On remarque que l'on a simplement $nx = n \times x$.

- Pour tout entier $n \geq 2$, on note x^n le produit de n répétitions de x. Autrement dit, $x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Par convention, $x^1 = x$ et $x^0 = 1$.

Exemples 2.7

- $3x + x^2 + 2x = x^2 + 5x$
- $3x \times x^2 \times 2x = 6 \times x^4 = 6x^4$
- $\dfrac{x^5}{x^7} = \dfrac{1}{x^2}$

Propriétés 2.8

Pour tous les réels x, y, z et t, on a :
- $(x + y) \times (z + t) = xz + xt + yz + yt$
- $(x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
- $(x - y)(x - y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Propriété 2.9

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. On condidère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta = 0$ alors l'équation possède une solution (dite double) qui est $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

(ii) Si $\Delta > 0$ alors l'équation possède deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

(iii) Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.10

Avec les notations de la propriété précédente et en posant $P = ax^2 + bx + c$, alors on a :

(i) Si $\Delta = 0$ alors $P = a(x - x_0)^2$.

(ii) Si $\Delta > 0$ alors $P = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 2.11

Factoriser si possible le polynôme P dans les cas suivants :

a. $P = 9x^2 + 6x + 1$
$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 = 0$, $x_0 = \dfrac{-6}{2 \times 9} = -\dfrac{1}{3}$
$P = 9\left(x - (-1/3)\right)^2 = 3^2\left(x + 1/3\right)^2 = (3x + 1)^2$.

b. $P = 4x^2 - 2x - 6$
$\Delta = 10^2$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 3/2$
$P = 4(x + 1)(x - 3/2) = 2(x + 1)(2x - 3)$

Propriété 2.12

Si x_0 est une racine d'un polynôme P c'est-à-dire si $P(x_0) = 0$ alors on peut factoriser P par $(x - x_0)$.

Propriété 2.13

Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors il existe deux polynômes Q et R tels que $\deg R < \deg B$ et $A = BQ + R$.
On dit que l'on a effectué la division euclidienne de A par B. Le polynôme Q en est le *quotient* et R le *reste*.

Remarque 2.14

Avoir $R = 0$ signifie que l'on peut factoriser A par B.

Exemple 2.15

On cherche à diviser $A = x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3$ par $B = x^2 - 2$.

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
x^4 & + & 3x^3 & + & 5x^2 & - & 4x & + & 3 & x^2 - 2 \\ \cline{10-10}
x^4 & & & - & 2x^2 & & & & & x^2 + 3x + 7 \\
 & & 3x^3 & + & 7x^2 & - & 4x & + & 3 & \\
 & & 3x^3 & & & - & 6x & & & \\
 & & & & 7x^2 & + & 2x & + & 3 & \\
 & & & & 7x^2 & & & - & 14 & \\
 & & & & & & 2x & + & 17 &
\end{array}$$

D'où $x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 2)(x^2 + 3x + 7) + 2x + 17$.

3 Inéquations

Propriétés 3.1

1. La relation $\leq$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$.

2. La relation $\leq$ est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et si $y \leq x$ alors $x = y$.

3. La relation $\leq$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et si $y \leq z$ alors $x \leq z$.

4. La relation $\leq$ est une relation d'ordre totale :

   $\forall x, y \in \mathbb{R}$, au moins l'une des deux expressions $x \leq y$ ou $y \leq x$ est verifiée.

5. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1 \leq y_1$ et si $x_2 \leq y_2$ alors $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

6. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $0 \leq x$ et si $0 \leq y$ alors $0 \leq x \times y$.

Remarques 3.2

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on définit $\geq$ par : $x \geq y$ si et seulement si $y \leq x$.
- La relation $\geq$ est aussi une relation d'ordre totale compatible avec la structure de corps de $\mathbb{R}$.
- Lorsqu'un réel x vérifie $x \leq 0$ (resp. $x \geq 0$), on dit qu'il est négatif (resp. positif).
- Attention : Si $x_1 \leq y_1$ et si $x_2 \leq y_2$ alors on n'a pas forcement $x_1 \times x_2 \leq y_1 \times y_2$.

Par exemple : $-4 \leq -1$ et $-3 \leq -2$ mais $(-4) \times (-3) \geq (-1) \times (-2)$.

- $x < y$ signifie $x \leq y$ et $x \neq y$. De même, $x > y$ signifie $x \geq y$ et $x \neq y$.

Exemples 3.3

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2x + 5 > 3$

$\Leftrightarrow\ 2x + 5 - 5 > 3 - 5\ \Leftrightarrow\ 2x > -2\ \Leftrightarrow\ 2x \times \dfrac{1}{2} > -2 \times \dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x > -1 \qquad S =]-1; +\infty[$

b. $7 - x > 5\ \Leftrightarrow\ 7 - x - 7 > 5 - 7\ \Leftrightarrow\ -x > -2\ \Leftrightarrow\ -x \times (-1) < -2 \times (-1)\ \Leftrightarrow\ x < 2 \qquad S =]-\infty; 2[$

c. $(x + 1)(2 - x)(2x + 3) \leq 0$

$x + 1 \geq 0\ \Leftrightarrow\ x \geq -1$

$2 - x \geq 0\ \Leftrightarrow\ x \leq 2$

$2x + 3 \geq 0\ \Leftrightarrow\ x \geq -3/2$

x	$-\infty$		$-3/2$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$(x+1)(2-x)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = [-3/2; -1] \cup [2; +\infty[$

Propriété 3.4

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. On condidère le polynôme $P = ax^2 + bx + c$ et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta = 0$ alors P est strictement du signe de a sauf en $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ où il vaut 0.

(ii) Si $\Delta > 0$ alors P est strictement du signe de a à l'extérieur des racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et est strictement opposé au signe de a à l'intérieur des mêmes racines.

(iii) Si $\Delta < 0$ alors P est strictement du signe de a.

Exemples 3.5

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $4x^2 + 4x + 1 > 0$

$\Delta = 0$; $x_0 = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

$S =]-\infty; -1/2[\cup]-1/2; +\infty[$

b. $x^2 + 3x + 2 \geq 0$

$\Delta = 1$; $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$

$S =]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$

c. $3x^2 + x + 5 > 0$

$\Delta = -59 < 0$

$S = \mathbb{R}$

4 Encadrement

On va étendre ici les propriétés de base des relations $\leq$ et $\geq$.
Dans cette partie, a, b, c et d sont des réels.

Définition 4.1

On dit que b est compris entre a et c et on note $a \leq b \leq c$ pour exprimer que b vérifie les deux relations $a \leq b$ et $b \leq c$.

Remarque 4.2

On dit aussi que b est strictement compris entre a et c (noté $a < b < c$) pour exprimer que b vérifie les deux relations $a < b$ et $b < c$.

Propriété 4.3

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq a \times c \leq b \times d$

Remarques 4.4

- Rappel : si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors nous n'avons pas forcément $a \times c \leq b \times d$. Par exemple, $1 \leq 3$ et $-2 \leq -1$ et pourtant $-2 \geq -3$.
- On étend sans difficultés le résultat précédent à 2×3 éléments, 2×4 éléments ou plus :

Si $0 \leq a \leq b \leq c$ et $0 \leq d \leq e \leq f$ alors $0 \leq a \times d \leq b \times e \leq c \times f$.

Propriétés 4.5

Si $0 < a$ alors $0 < \dfrac{1}{a}$.

Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

Remarque 4.6

On a $-1 \leq 1$ et $\dfrac{1}{-1} \leq \dfrac{1}{1}$.

Remarque 4.7

On étend sans difficultés le résultat précédent à 3 éléments, 4 éléments ou plus :
Si $0 < a \leq b \leq c$, alors $0 < \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

Exemple 4.8

Sachant que $5 \leq x \leq 10$ et que $1 \leq y \leq 2$, encadrer $\dfrac{x}{y}$.
On va utiliser les deux propositions précédentes.
$1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{y} \leq 1$.
De $5 \leq x \leq 10$ et $0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{y} \leq 1$, on obtient $0 < 5 \times \dfrac{1}{2} \leq x \times \dfrac{1}{y} \leq 10 \times 1$. C'est-à-dire $0 < \dfrac{5}{2} \leq \dfrac{x}{y} \leq 10$.

Propriété 4.9

On a : $0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq a^2 \leq b^2$

Remarques 4.10

- Attention Danger 1 : $a \leq b \not\Rightarrow a^2 \leq b^2$.

Par exemple : $-3 \leq -1$ mais $(-3)^2 \geq (-1)^2$.

- Attention Danger 2 : $0 \leq a^2 \leq b^2 \not\Rightarrow 0 \leq a \leq b$.

Par exemple : $0 \leq (-3)^2 \leq (-4)^2$ mais $0 \geq -3 \geq -4$.

On peut donc se demander sous quelles conditions l'équivalence a lieu.

Corollaire 4.11

Si a et b sont positifs alors on a : $a \leq b \ \Leftrightarrow\ a^2 \leq b^2$.
Si a et b sont négatifs alors on a : $a \leq b \ \Leftrightarrow\ a^2 \geq b^2$.

Remarque 4.12

On peut étendre cette propriété à 3 réels ou plus.
Si a, b et c sont positifs alors on a $\quad a \leq b \leq c \ \Leftrightarrow\ a^2 \leq b^2 \leq c^2$.
Si a, b et c sont négatifs alors on a $\quad a \leq b \leq c \ \Leftrightarrow\ a^2 \geq b^2 \geq c^2$.

Exemples 4.13

- On cherche à encadrer x^2 sachant que $-3 \leq x \leq -2$.

$-3 \leq x \leq -2 \ \Leftrightarrow\ 4 \leq x^2 \leq 9$.

- On cherche à encadrer x^2 sachant que $-3 \leq x \leq 2$.

Réponse : $-3 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0$ ou $0 \leq x \leq 2$.
$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$ ou $0 \leq x^2 \leq 4$.
$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$.

- On cherche à résoudre $\sqrt{x+3} \geq 2$ sur $[-3; +\infty[$.

Réponse : $\sqrt{x+3} \geq 2 \Rightarrow x + 3 \geq 4 \Rightarrow x \geq 1$. D'où $\mathcal{S} = [1; +\infty[$.

Propriété 4.14

On a : $a \leq b \ \Leftrightarrow\ a^3 \leq b^3$.

Remarque 4.15

Si n est pair, a^n et b^n se comportent comme a^2 et b^2.
Si n est impair, a^n et b^n se comportent comme a^3 et b^3.

Rappel

Soient a et b deux réels tels que $a < b$:
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Propriété 4.16

On suppose $a, b > 0$.
Il existe un entier non nul n tel que $na > b$. On dit que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Définition 4.17

Soit x un réel. Il existe un et un seul entier relatif x_0 tel que $x_0 \leq x < x_0 + 1$.
Cet entier x_0 est appelé partie entière de x et est noté $\mathrm{E}(x)$.

Exemples 4.18

$\mathrm{E}\left(\dfrac{27}{12}\right) = 2$ et $\mathrm{E}(-\pi) = -4$.

Remarque 4.19

Pour tout réel x, on a $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$ mais aussi $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x$.

5 Valeur absolue

5.1 Propriétés

Définition 5.1

Soit x un réel.
On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel $\max\{-x; x\}$.
C'est-à-dire $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

Remarque 5.2

$\forall x \in \mathbb{R}$, nous avons les propriétés élémentaires suivantes :
- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x^2 = |x|^2$

Propriété 5.3

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a \times b| = |a| \times |b|$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $|a^{-1}| = \left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|} = |a|^{-1}$.

Remarques 5.4

- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall p \in \mathbb{Z}, |x^p| = |x|^p$
(Démonstration par récurrence pour $p \geq 0$ et $x^p = (x^{-1})^{-p}$ pour $p < 0$).
• En général, on n'a pas la compatibilité avec l'addition. C'est-à-dire : $|a+b| \neq |a| + |b|$.
Par exemple, $|-6+2| = 4$ et $|-6| + |2| = 6 + 2 = 8$.

Propriété 5.5

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leq |x| + |y|$. Cette relation est appelée l'inégalité triangulaire.

Remarque 5.6

On peut généraliser cette relation à un nombre $n \geq 3$ de termes :
$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

5.2 Valeur absolue et relations

Propriété 5.7

• $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \geq 0,\ |x| = m \ \Leftrightarrow\ x = -m$ ou $x = m$.
• $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \ \Leftrightarrow\ x = -y$ ou $x = y$.
• $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \geq 0,\ |x| \leq m \ \Leftrightarrow\ -m \leq x \leq m$.
• $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \geq 0,\ |x| \geq m \ \Leftrightarrow\ x \leq -m$ ou $x \geq m$.
• $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| \leq |y| \ \Leftrightarrow\ |x|^2 \leq |y|^2 \ \Leftrightarrow\ x^2 \leq y^2$.

Remarque 5.8

En pratique, il faut faire attention au fait que, dans l'égalité, $|x| = m$, on doit avoir m positif.

Exemples 5.9

• $|2x-3| = |x| \Leftrightarrow 2x - 3 = -x$ ou $2x - 3 = x \Leftrightarrow 3x = 3$ ou $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$.
• $|2x-3| = |x| \Leftrightarrow |2x-3|^2 = |x|^2 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = x^2 \Leftrightarrow (2x-3)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(3x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$
$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4 = 2^2$
$x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1,\ x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$
• $|x+3| \leq |2x-1| \Leftrightarrow (x+3)^2 \leq (2x-1)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - (x+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3x+2)(x-4) \geq 0$
$(3x+2)(x-4)$ est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-\dfrac{2}{3}$ et 4.
Le coefficient du terme en x^2 est positif.
Donc on doit avoir $x \leq -\dfrac{2}{3}$ ou $x \geq 4$.

Propriété 5.10

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Définition 5.11

Soient a, b, x trois réels.
Si $a \leq x \leq b$, on dit que l'on a un encadrement de x. L'amplitude de l'encadrement est $\varepsilon = b - a$.
On dit que a est une valeur approchée de x à ε près par défaut.
On dit que b est une valeur approchée de x à ε près par excès.

Exemple 5.12

$1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$.
$1,41$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $0,01$ près par défaut.
$1,42$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $0,01$ près par excès.

Remarque 5.13

Pour tous réels x et y, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y et elle est généralement notée $\mathrm{d}(x, y)$.
Par exemple (placer les points -2 et 3 sur une droite graduée), si $x = -2$ et $y = 3$, $\mathrm{d}(x, y) = |-2-3| = |-5| = 5$.

Définition 5.14

Soient a et x deux réels:
On dit que a est une valeur approchée de x à $\varepsilon > 0$ près si $|x - a| \leq \varepsilon$
($\Leftrightarrow\ d(x, a) \leq \varepsilon\ \Leftrightarrow\ a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$).