Rappel : Couples de v.a.r discrètes

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, X et Y sont deux v.a.r discrètes définies sur un même espace probabilisé (Ω, p). On suppose que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont respectivement les ensembles $\{x_i \mid i \in I\}$ et $\{y_j \mid j \in J\}$ où I et J (non nécessairement égal à I) sont soit des parties finies de $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ tout entier.

1 Loi d'un couple de v.a.r, lois marginales et indépendance

Définition 1.1

On appelle *couple* de v.a.r discrètes et on note (X, Y) toute application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ pour tout ω de Ω.

Définition 1.2

On appelle *loi du couple* de v.a.r discrètes (X, Y), ou encore *loi conjointe* des v.a.r X et Y, l'ensemble des couples $((x_i, y_j), p_{i,j})$ où $x_i \in X(\Omega)$, $y_j \in Y(\Omega)$ $p_{i,j} = p\left((X{=}x_i) \cap (Y{=}y_j)\right)$

Définition 1.3

Soit (X, Y) un couple de v.a.r discrètes. La loi de X est appelé la *première loi marginale* du couple (X, Y) et la loi de Y est appelée la *deuxième loi marginale* du couple (X, Y).

Propriété 1.4

Soit (X, Y) un couple de v.a.r discrètes. On a :

- $\forall i \in I$, $p\left(X{=}x_i\right) = \displaystyle\sum_{j \in J} p\left((X{=}x_i) \cap (Y{=}y_j)\right)$
- $\forall j \in J$, $p\left(Y{=}y_i\right) = \displaystyle\sum_{i \in I} p\left((X{=}x_i) \cap (Y{=}y_j)\right)$

Définition 1.5

Soit (X, Y) un couple de v.a.r discrètes et soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $p(Y{=}y) \neq 0$.
On appelle *loi conditionnelle à* $(Y{=}y)$ *de* X l'ensemble des couples $(x_i, p(X{=}x_i)_{|(Y=y)})$ pour $i \in I$ où $p(X{=}x_i)_{|(Y=y)} = \dfrac{p\left((X{=}x_i) \cap (Y{=}y)\right)}{p(Y{=}y)}$.

Remarque 1.6

On définit de façon symétrique, pour $x \in X(\Omega)$ tel que $p(X{=}x) \neq 0$, la *loi conditionnelle à* $(X{=}x)$ *de* Y.

Définition 1.7

On dit que deux v.a.r discrètes X et Y sont *indépendantes* si :

$$p\left((X{=}x) \cap (Y{=}y)\right) = p(X{=}x) \times p(Y{=}y) \quad \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

2 Espérance et covariance

Rappel

$E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i) = \sum_i x_i p_i$

Propriété 2.1

Soit $Z = X \times Y = XY$. Alors on a $p(Z = z_k) = \sum_{(i,j) | x_i \times y_j = z_k} p((X{=}x_i) \cap (Y{=}y_j))$

Propriété 2.2

- $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \times p((X{=}x) \cap (Y{=}y))$
- Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

Définition 2.3

Soient X et Y deux v.a.r discrètes.
Si elle existe, on appelle *covariance de* X *et de* Y le nombre $\text{cov}(X;Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

Propriété 2.4

Si cela est possible, alors $\text{cov}(X;Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Propriété 2.5

$\text{cov}(Y;X) = \text{cov}(X;Y)$ et $\text{cov}(X;X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$

Corollaire 2.6

Si X et Y sont indépendantes alors $\text{cov}(X;Y) = 0$.

Définition 2.7

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont *non corrélées* si $\text{cov}(X,Y) = 0$.

Définition 2.8

Soient X et Y deux v.a.r discrètes d'écart type non nul.
On appelle *coefficient de corrélation linéaire de* X *et* Y le réel $\rho(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{\text{cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.

Rappel

$E(X^2) = \sum_i x_i^2 \times P(X = x_i) = \sum_i x_i^2 p_i$

Exemple 2.9

Une urne contient 2 jetons bleu numérotés de 1 à 2 et 3 jetons rouges numérotés de 1 à 3. On tire simultanément deux jetons. Soit X la variable aléatoire correspond au total des valeurs des deux jetons. Soit Y la variable aléatoire correspond au nombre de jetons de couleur bleu.
On veut étudier le couple de variables aléatoires $(X;Y)$.