Réduction des endomorphismes et des matrices

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, n est un entier non nul et $\mathbb{R}$ peut être remplacé par $\mathbb{C}$.

1 Valeurs propres d'une matrice

Notations

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$
- L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$.
- Une matrice d'ordre n de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ est notée $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Rappels

- Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ peut être représentée par une matrice à p lignes et n colonnes. Les coefficients de cette matrice dépendent des bases choisies.
- Réciproquement, une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ correspond à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 1.1

On appelle *endomorphisme* toute application linéaire d'un espace dans lui-même.

Remarque 1.2

Définition 1.3

On dit qu'un s.e.v F de $\mathbb{R}^n$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $f(F) \subset F$.

Exemple 1.4

Définition 1.5

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_p X^p = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On définit la matrice $P[M]$ par $P[M] = a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + ... + a_p M^p = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$.

On dit que $P[M]$ est un polynôme en M.
De plus, si $P[M] = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de M.

Exemple 1.6

Définition 1.7

On dit qu'une matrice N est *nilpotente* d'ordre $p \geq 1$ si X^p est un polynôme annulateur de N et X^{p-1} n'en est pas un.

Exemple 1.8

Définition 1.9

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $M = P^{-1}NP$.

Rappel

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a A inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$.

Définition 1.10

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un élément de $\mathbb{R}$.
On dit que λ est une *valeur propre* de M s'il existe au moins un vecteur colonne X_0 **non nul** tel que $MX_0 = \lambda X_0$.
Un tel vecteur X_0 est appelé *vecteur propre* de M pour la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M dans $\mathbb{R}$ est appelé le *spectre* de M dans $\mathbb{R}$, et est noté $\mathrm{Sp}\,(M)$.

Exemple 1.11

Remarque 1.12

Propriété 1.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \lambda X\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.14

Définition 1.15

Soit λ une valeur propre d'une matrice A
Le sous-espace $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \lambda X\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ de dimension supérieure ou égale à 1.
Il est appelé *sous-espace propre* de A pour la valeur propre λ.

Remarque 1.16

Exemple 1.17

Remarque 1.18

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, ayant pour matrice M dans une base (b) de $\mathbb{R}^n$.
Les valeurs propres de f sont celles de M.
Soient λ un scalaire, u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et U la matrice colonne de ses coordonnées dans la base (b).
Alors u est vecteur propre de f pour λ si U est vecteur propre de M pour λ.
Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique (e).

Remarques 1.19

- Cas particulier : 0 est valeur propre de f si et seulement si f est non injective.

Le sous-espace propre associé à 0 alors $E_0 = \mathrm{Ker}\,(f)$.

- Soit u un vecteur non nul.

Dire que u_0 est vecteur propre de f, c'est dire que la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u_0)$ est stable par f.

- La restriction de f à E_λ est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.

2 Polynôme caractéristique

Rappel

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, (e) une base de $\mathbb{R}^n$ et $A = \mathcal{M}_{(e)}(f)$.
On a vu que : λ valeur propre de f si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul (et $X \in \mathbb{R}^n$) tel que : $(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n})(x) = 0$ ou $(A - \lambda I_n)X = 0$.
On a $A - \lambda I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $A - \lambda I_n$ était inversible, on aurait $(A - \lambda I_n)X = 0 \;\Rightarrow\; X = 0$.
$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \;\Leftrightarrow\; \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 2.1

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle *polynôme caractéristique* de M et on note $\tilde{\pi}_M$ le polynôme défini par $\tilde{\pi}_M = \det(M - XI_n)$.

Exemples 2.2

Remarques 2.3

- Le polynôme caractéristique de M vérifie: $\tilde{\pi}_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,(M)\,X^{n-1} + \cdots + \det(M)$.
  En particulier, $\det(M) = 0 \;\Leftrightarrow\;$ X peut être mis en facteur dans $\tilde{\pi}_M$.
  Autrement dit, M est inversible si et seulement si 0 n'est pas une racine de $\tilde{\pi}_M$.
- Les matrices M et ${}^tM$ ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition 2.4

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On appelle polynôme caractéristique de f celui de la matrice M de f dans une base (b) quelconque de $\mathbb{R}^n$. On le note $\tilde{\pi}_f$.

Remarque 2.5

D'après la propriété précédente, il ne dépend pas de la base choisie.

Théorème 2.6 **Hamilton - Cayley**

Toute matrice est racine de son polynôme caractéristique.

Remarques 2.7

- Cela signifie que $\tilde{\pi}_M[M] = 0$.
- Si M est nilpotente d'ordre q dans $\mathbb{R}^n$, on a $\tilde{\pi}_M = (-1)^n X^n$ car on a $n \geq q$.

Exemples 2.8

Propriété 2.9

Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et λ un élément de $\mathbb{R}$.
λ est valeur propre de M si et seulement si λ est racine de $\tilde{\pi}_M$.

Exemples 2.10

Remarque 2.11

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension $n \geq 1$, admet au moins une valeur propre.

Définition 2.12

Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et λ un élément de $\mathbb{R}$.
On dit que λ est une valeur propre de M (resp. de f), avec la *multiplicité* k ($1 \leq k \leq n$), si λ est racine de $\tilde{\pi}_M$ (resp. de $\tilde{\pi}_f$), avec la multiplicité k.
Cette multiplicité est souvent notée $m(\lambda)$.
On parle ainsi de valeur propre simple, double, triple, ... si $m(\lambda) = 1, 2, 3, \ldots$.

Exemple 2.13

Remarque 2.14

Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres.

Propriété 2.15

Soient E_1, E_2 les sous-espaces propres de deux valeurs propres λ_1, λ_2 différentes d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$).
Alors $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ce qui implique que la somme $E_1 + E_2$ est directe ($E_1 \oplus E_2$).

Remarque 2.16

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et u un élément de $\mathbb{R}^n$.
Si u est vecteur propre de f, ce ne peut-être que pour une seule valeur propre : l'unique scalaire λ tel que $f(u) = \lambda u$.
Mais si λ est une valeur propre de f, il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ : les vecteurs non nuls de E_λ.

Propriété 2.17

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ une famille de p valeurs propres distinctes de f.
Notons $E_1, E_2, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.
Alors la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe.
De manière équivalente : si $u_1, u_2, \ldots, u_r$ est une famille de vecteurs propres de f pour r valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

Remarque 2.18

f admet au plus n valeurs propres différentes dans $\mathbb{R}$.
Il en est de même pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 2.19

Définition 2.20

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(K)$.
On dit que M est *diagonalisable* si M est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}MP$.
On dit alors que D est une *réduite diagonale de M*.

Définition 2.21

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est *diagonalisable* si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Remarques 2.22

- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est diagonalisable.
- Si M est diagonalisable et si N est semblable à M, alors N est diagonalisable.
- Rappel : Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

On peut donc définir la trace et le déterminant d'un endomorphisme f d'un e.v. de dimension finie comme étant la trace et le déterminant de la matrice représentative de f dans n'importe quelle base de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2.23

Si un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable, alors $\det f$ est le produit des valeurs propres de f et $\mathrm{tr} f$ est la somme des valeurs propres de f.

Propriété 2.24

Si le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est scindé, c'est-à-dire se décompose en un produit de n polynômes (éventuellement identiques) de degré 1, alors $tr(M)$ (resp. $\det(M)$) est égale à la somme (resp. au produit) des valeurs propres de M chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

Propriété 2.25

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient $(E_1, E_2, \ldots, E_r)$ les espaces propres associés à $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r\}$.
M diagonalisable $\Leftrightarrow$ $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$ $\Leftrightarrow$ $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 + \cdots + \dim E_r$.

Propriété 2.26

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si M admet n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Exemple 2.27

Propriété 2.28

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
M est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique $\tilde{\pi}_M$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et pour toute valeur propre λ (c'est-à-dire toute racine de $\tilde{\pi}_M$) la multiplicité $m(\lambda)$ est égale à la dimension $d(\lambda)$ du sous-espace propre E_λ.

Exemple 2.29

Remarque 2.30

Avec les notations ci-dessus, les coefficients de la diagonale de D sont les valeurs propres de M, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.
Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base de vecteurs propres de M.

3 Réduction de matrice : pratique et applications

3.1 Diagonalisation d'une matrice

On cherche à diagonaliser si possible une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On calcule le polynôme caractéristique $\tilde{\pi}_M$ de la matrice M puis les racines dans $\mathbb{R}$ de ce polynôme.
- Si le polynôme $\tilde{\pi}_M$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, alors M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- Si au contraire $\tilde{\pi}_M$ est scindé alors pour chaque racine λ on résout le système homogène $MX = \lambda X$, où X est une matrice colonne de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble des solutions de ce système est le sous-espace propre E_λ.
La résolution conduit à une base $(b)_\lambda$ de E_λ, donc à $\dim(E_\lambda)$.

- Si, pour l'un des λ, on a $\dim(E_\lambda) \neq m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de $\tilde{\pi}_M$, alors M n'est pas diagonalisable.
- Sinon M est diagonalisable, et la juxtaposition des bases $(b)_\lambda$ donne une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres.

On en déduit la matrice de passage P de la base canonique à la base (b), et l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M, dans l'ordre des vecteurs propres de la base (b).

Exemple 3.1

3.2 Application : Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Propriété 3.2

Si $E = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ alors $E^k = \operatorname{diag}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k)$ pour tout entier naturel k.
Si, de plus, tous les α_i sont non nuls alors on peut étendre ce résultat à k négatif (en particulier $k = -1$).

Exemple 3.3

Propriété 3.4

Si une matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable, l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est une matrice diagonale, permet d'écrire $M = PDP^{-1}$ puis pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$.
On peut généraliser aux entiers relatifs k si M est inversible.

Propriété 3.5

Si A est une matrice diagonalisable, alors $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une valeur absolue inférieure strictement à 1.

Exemple 3.6

3.3 Calcul des puissances d'une matrice non diagonalisable

Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors il existe deux polynômes Q et R tels que $\deg R < \deg B$ et $A = BQ + R$.

On dit que l'on a effectué la division euclidienne de A par B.
Le polynôme Q en est le *quotient* et R le *reste*.

Avoir $R = 0$ signifie que l'on peut factoriser A par B.

Si x_0 est une racine d'un polynôme P de multiplicité r alors $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = \ldots = P^{(r)}(x_0) = 0$.

Le polynôme caractéristique $\tilde{\pi}_M$ d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de degré n.

Pour tout entier k, on peut donc effectuer la division euclidienne de X^k par $\tilde{\pi}_M$ et le reste sera de degré strictement inférieur à n

Autrement dit, $X^k = \tilde{\pi}_M \times Q + a_0 + a_1 X + \dots a_{n-1} X^{n-1}$.

D'après le théorème d'Hamilton-Cayley, $\tilde{\pi}_M[M] = 0$.

Donc $M^k = a_0 I_n + a_1 M + \dots a_{n-1} M^{n-1}$.

Il suffit donc de connaître les réels $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$.

Si λ est une racine de $\tilde{\pi}_M(x)$ (c'est-à-dire une valeur propre de M) de multiplicité α alors, on remplace x par λ dans l'équation $x^k = \tilde{\pi}_M(x) \times Q(x) + a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1}$ et ses $\alpha - 1$ équations dérivées.

On aura alors un système avec n équations et n inconnues qu'il "suffira" de résoudre.

3.4 Application : Intégration des systèmes différentiels linéaires

Soit un système de 3 équations différentielles linéaires du 1er ordre sans second membre, à coefficients constants, de 3 fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = ax_1(t) + bx_2(t) + cx_3(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = dx_1(t) + ex_2(t) + fx_3(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = gx_1(t) + hx_2(t) + ix_3(t) \end{array} \right. \quad \text{ou plus simplement} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1' = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x_2' = dx_1 + ex_2 + fx_3 \\ x_3' = gx_1 + hx_2 + ix_3 \end{array} \right. \tag{1}$$

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $X' = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

Le système (1) peut donc s'écrire $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$.

Si A est diagonalisable, il existe un matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ telle que $X = PY$. On a $Y' = \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$ et $X' = PY'$.

Mais $X' = AX \Rightarrow PY' = APY \Rightarrow Y' = P^{-1}APY = DY$.

On est donc ramener à résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & \lambda_1 y_1(t) \\ y_2' & = & \lambda_2 y_2(t) \\ y_3' & = & \lambda_3 y_3(t) \end{array} \right.$

D'où $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

On trouve X par la relation $X = PY$.

Exemple 3.7

3.5 Application : Systèmes de suites récurrentes de pas 1

Soient $(u_p)_{p\geq 0}$, $(v_p)_{p\geq 0}$ et $(w_p)_{p\geq 0}$ trois suites de $\mathbb{R}$ vérifiant le système suivant (appelé système de suites linéaires récurentes d'ordre 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} = du_n + ev_n + fw_n \\ w_{n+1} = gu_n + hv_n + iw_n \end{array} \right.$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
On a donc $U_{n+1} = A \times U_n$. D'où $U_n = A^n \times U_0$.
Connaître les valeurs des suites $(u_p)_{p\geq 0}$, $(v_p)_{p\geq 0}$, $(w_p)_{p\geq 0}$ nécessite le calcul des puissances de A.
Ce problème peut être restreint à deux suites.
Mais il peut être aussi étendu à un nombre quelconque de suites

Exemple 3.8

3.6 Application : Etude d'une récurrence linéaire de pas 3

Soit une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par une relation de récurrence du type :
$\forall n \geq N, u_{n+3} = \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n$.
On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et M est la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
En particulier $U_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ et on a $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1} = M \times U_n$
Ce qui implique que $U_n = M^n \times U_0$.
Le problème se résume à nouveau à calculer M^n.
Le polynôme caractéristique de M est $\tilde{\pi}_M = -X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

Exemple 3.9