Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ peut être remplacé par $\mathbb{C}$.

1 Structure d'espace vectoriel

Rappelons que l'on définit l'ensemble $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ où } x_i \in \mathbb{R}\}$.
En pratique, nous travaillerons parfois avec $n = 2$, souvent avec $n = 3$ et rarement avec $n = 4$.
C'est-à-dire :
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des réels}\}$
$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ où } x,\ y \text{ et } z \text{ sont des réels}\}$
$\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t) \text{ où } x,\ y,\ z \text{ et } t \text{ sont des réels}\}$

Soient $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

On définit l'égalité sur $\mathbb{R}^n$ par $u = v \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$.

Définition 1.1

Soient $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$.
On définit l'addition dans $\mathbb{R}^n$ et la multiplication d'un élément de $\mathbb{R}^n$ par un élément de $\mathbb{R}$ par :
$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
$k.u = (k \times x_1, k \times x_2, \ldots, k \times x_n)$

Exemples 1.2

Remarque 1.3

Définition 1.4

On appelle vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ et on note $0_{\mathbb{R}^n}$ le vecteur essentiellement composé de 0.

Remarque 1.5

Exemple 1.6

Propriété 1.7

L'ensemble $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$, ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, car il vérifie toutes les propriétés suivantes :
$\diamond$ $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif c'est à dire
- La loi $+$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^n$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x + y \in \mathbb{R}^n$.

- La loi + est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
- La loi + admet un élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + x = x$.
- Tout élément admet un symétrique pour la loi + : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists x' \in \mathbb{R}^n \,/\, x + x' = x' + x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- La loi + est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x + y = y + x$.

◇ La loi . est une loi de composition ext sur $\mathbb{R}^n$ à domaine d'opérateurs $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$, $k.x \in \mathbb{R}^n$.
◇ La loi . verifie : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$,

- $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$
- $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$
- $\alpha.(\beta.u) = (\alpha \times \beta).u$
- $1.u = u$

Remarques 1.8

- Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés des *vecteurs* et ceux de $\mathbb{R}$ sont appelés des *scalaires*.
- Par abus, on ne note généralement pas la loi . et on dit que $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e.v. ou simplement un e.v. sans préciser les lois.
- Soient u et v deux vecteurs du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^n$.

On définit $u - v$ par $u + (-v)$ où $-v$ désigne le symétrique de v pour la loi interne de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 1.9

Pour tout scalaire α de $\mathbb{R}$ et tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$, on a :

- $0_{\mathbb{R}} u = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- $\alpha 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- $\alpha u = 0_{\mathbb{R}^n} \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0_{\mathbb{R}}$ ou $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- $\alpha(-u) = (-\alpha)u = -(\alpha u)$.
- $\alpha(u-v) = \alpha u - \alpha v$.

Définition 1.10

Soient $(u_i)_{i=1,p} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $(\lambda_i)_{i=1,p} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ une famille de réels.
La somme $\sum\limits_{i=1,p} \lambda_i \, u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$ est appelée *combinaison linéaire* (C.L.) des vecteurs u_i avec les coefficients λ_i.

Exemples 1.11

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 2.1

Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$.
On dit que F est un *sous espace vectoriel* de $\mathbb{R}^n$ si, muni des lois *induites*, F est un espace vectoriel.

Remarques 2.2

- On dit aussi *sous-espace* plutôt que s.e.v.
- $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont deux s.e.v de $\mathbb{R}^n$, appelés sous-espaces *triviaux*.

Propriété 2.3

Une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si:

(i) $F \neq \emptyset$.
(ii) $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F,\ \lambda u \in F$.

ou encore si et seulement si

(i) $F \neq \emptyset$.
(ii) $\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \lambda u + \mu v \in F$.

Exemple 2.4

Remarques 2.5

2.2 Opérations entre s.e.v.

Propriété 2.6

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.7

Soit X est une partie non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$.
On appelle *sous-espace engendré* par X et on note $\mathrm{Vect}(X)$ le plus petit (au sens de l'inclusion) des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ qui contiennent X.

Propriété 2.8

$\mathrm{Vect}(X)$ est l'intersection de tous les s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ qui contiennent X.

Propriété 2.9

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Remarque 2.10

Propriété 2.11

Dans $\mathbb{R}^n$, tous les s.e.v. sont des s.e.v. engendrés par une famille finie de vecteurs.

Propriété 2.12

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_p)$ une famille finie de s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
Soit F l'ensemble des vecteurs de la forme $\displaystyle\sum_{i=1,p} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_p$ où $u_i \in F_i$ pour tout $i = 1, p$.

F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ appelé *somme* des F_i et noté $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + \ldots + F_p$.

Remarques 2.13

- Si F et G sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, $F + G = \{u + v \text{ où } u \in F \text{ et } v \in G\}$.
- Si F et G sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, leur réunion $H = F \cup G$ n'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ que si $F \subset G$ auquel cas $H = G$, ou $G \subset F$ auquel cas $H = F$.
- En général, une réunion de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ n'est donc pas un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2.14

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_p)$ une famille finie de s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

La somme $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est le plus petit sous-espace de $\mathbb{R}^n$ contenant tous les F_i.

C'est le s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ engendré par la réunion des F_i.

Remarque 2.15

2.3 Sommes directes

Définition 2.16

Soit une famille finie $F_1, F_2, \cdots, F_p$ de s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est *directe* si tout vecteur v de F s'écrit *de manière unique* sous la forme $v = \sum_{i=1}^{p} u_i$, où pour tout $i = 1, p$, $u_i \in F_i$.

On dit que u_i est la *composante* de u sur F_i relativement à cette somme directe.
La somme F est alors notée $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Propriété 2.17

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_p)$ une famille finie de s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

La somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si :

$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \prod_{i=1}^{p} Fi$, on a $\sum_{i=1}^{p} u_i = 0 \ \Rightarrow\ u_i = 0 \quad \forall i = 1, p$.

Propriété 2.18

Soient F et G deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. La somme $F + G$ est directe si et seulement si$F \cap G = \{0\}$.

Remarques 2.19

2.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.20

Soient F et G deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
On dit que F et G sont *supplémentaires* dans $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.
Cela signifie que tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$ s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

Théorème 2.21

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Alors F possède au moins un supplémentaire dans $\mathbb{R}^n$.

Remarques 2.22

3 Familles libres, génératrices, bases

3.1 Familles libres

Définition 3.1

On dit qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est *libre*, ou encore que les vecteurs de cette famille sont *linéairement indépendants* si :
$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^n$, $[\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \ldots + \lambda_p\, u_p = 0] \ \Rightarrow\ [\lambda_i = 0,\ \forall i = 1, p]$.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i=1,p}$ de scalaires *non tous nuls* telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, u_i = 0$, on dit que la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est *liée*, ou encore que les vecteurs qui la composent sont *linéairement dépendants*.

Exemple 3.2

Remarques 3.3

3.2 Familles génératrices

Définition 3.4

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ (ne pas oublier le cas particulier $F = \mathbb{R}^n$).
On dit qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ d'éléments de F est *génératrice* de F, ou encore que les vecteurs de cette famille *engendrent* F si $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = F$, c'est-à-dire :
Pour tout vecteur $v \in F$, il existe p réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \ldots + \lambda_p\, u_p$.

Remarque 3.5

Exemple 3.6

Remarques 3.7

3.3 Bases

Définition 3.8

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ (encore : ne pas oublier le cas particulier $F = \mathbb{R}^n$).
On dit qu'une famille $(u_i)_{i=1,p}$ est une *base* de F si elle est à la fois libre et génératrice de F.

Exemple 3.9

Remarques 3.10

Propriété 3.11

Une famille $(b) = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ est une base d'un s.e.v. F de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout u de F, il existe p réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ définis de manière **unique** tels que : $u = x_1\, b_1 + x_2\, b_2 + \ldots + x_p\, b_p$.
Les coefficients x_i sont appelés *composantes*, ou *coordonnées*, de u dans la base (b).
On note $[u]_{(b)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Exemple 3.12

Remarque 3.13

Théorème 3.14

Si F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ alors toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé la *dimension* de F et est noté $\dim(F)$.
Par convention, on pose $\dim\{0\} = 0$.

Exemple 3.15

Propriété 3.16

Pour tout entier n non nul, on a $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Propriétés 3.17

Soit F un s.e.v de $\mathbb{R}^n$. Soit $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de F.
- Si (e) est génératrice de F, alors toute famille contenant plus de p vecteurs de F est liée.
- Si (e) est libre, aucune famille de moins de p vecteurs n'est génératrice de F.

Remarque 3.18

Dans la cas particulier où $F = \mathbb{R}^n$ et en considérant pour (e) la base canonique, on obtient que :
- Toute famille contenant plus de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée.
- Toute famille contenant moins de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Définitions 3.19

Soit E un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
- On dit que E est une *droite vectorielle* si et seulement si $\dim E = 1$.

Tout vecteur non nul $u \in E$ constitue une base de E, et $E = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- On dit que E est un *plan vectoriel* si et seulement si $\dim E = 2$.

Deux vecteurs u et v de E non proportionnels forment une base de E, et $E = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Définition 3.20

Soit $(b) = (b_1, b_2, \dots b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(u) = (u_1, u_2, \dots u_p)$ une famille de $p(\geq 1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle matrice de la famille (u) dans la base (b) la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées dans la base (b) des vecteurs u_i pour i dans l'ordre de 1 à p c'est-à-dire $[u_1]_{(b)}, [u_2]_{(b)}, \dots [u_p]_{(b)}$.
On notera cette matrice $\mathcal{M}_{(b)}(u)$.

Exemples 3.21

Remarque 3.22

$\mathcal{M}_{(b)}(u)$ est une matrice $n \times p$.

Définition 3.23

Soit (u) une famille de $\boldsymbol{n}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on appelle déterminant de (u) et on note $\det(u)$ le déterminant de sa matrice dans une base (b) de $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire $\det(u) = \det(\mathcal{M}_{(b)}(u))$.

Exemple 3.24

Définition 3.25

Soit $(a) = (a_1, a_2, \dots a_p)$ une famille de $p(\geq 1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$
On appelle rang de (a) et on note $\mathrm{rg}\,(a)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par a i.e. $\mathrm{rg}\,(a) = \dim \mathrm{Vect}((a))$.

Exemple 3.26

Propriété 3.27

Pour toute famille (u) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et tout base (b) de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{rg}\,(a) = \mathrm{rg}\,(\mathcal{M}_{(b)}(u))$.

Exemple 3.28

Propriété 3.29

Soit $(u) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de $\boldsymbol{n}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
(u) est une base $\Leftrightarrow$ elle est libre $\Leftrightarrow$ elle est génératrice.

Exemple 3.30

Remarque 3.31

Théorème 3.32

Soit F un s.e.v de $\mathbb{R}^n$. Soit (e) une famille génératrice de F.
Soit $(u) = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de F, non génératrice.
Alors il est possible de compléter la famille (u) à l'aide de vecteurs de la famille (e), de manière à former une base de F.

Définition 3.33

Soient (b) et (b') deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de (b) à (b') et on note $P_{b\to b'}$ la matrice de la famille (b') dans la base (b).

Remarque 3.34

Exemple 3.35

Propriété 3.36

Soient (b) et (b') deux bases de $\mathbb{R}^3$.
La matrice de passage de (b) à (b') est inversible et $(P_{b\to b'})^{-1} = P_{b'\to b}$.

Remarque 3.37

Exemple 3.38

Propriété 3.39

Soient (b) et (b') deux bases de $\mathbb{R}^3$ et soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors $[v]_b = P_{b\to b'} \times [v]_{b'}$.

Exemple 3.40

3.4 Sous-espaces de dimension finie

Propriété 3.41

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Alors $\dim F \leq n$.
De plus, on a l'égalité $\dim F = n$ si et seulement si$F = \mathbb{R}^n$.

Propriété 3.42

Soient F et G deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
- Dans le cas général, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Propriété 3.43

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ une famille de p s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie.
- On a toujours $\dim(F_1 + F_2 + \ldots + F_p) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \ldots + \dim(F_p)$.
- On a l'égalité $\dim(F_1 + F_2 + \ldots + F_p) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \ldots + \dim(F_p)$ si et seulement sila somme $F_1 \oplus F_2 + \ldots \oplus F_p$ est directe.

Propriété 3.44

Deux s.e.v. F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement sila famille composée d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.45

4 Applications linéaires

4.1 Définitions et notations

Définition 4.1

Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est dite *linéaire* si :
$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$
On dit aussi que f est un *morphisme* d'espace vectoriels.

Exemple 4.2

Remarques 4.3

Définitions 4.4

- On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
- On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont appelés aussi des *endomorphismes* de $\mathbb{R}^n$.
- Une *forme linéaire* sur $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques 4.5

4.2 Noyau et image

Définition 4.6

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$
- L'ensemble $\{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^n\}$ est un s.e.v. de F.

On l'appelle *image* de f et on le note $\mathrm{Im}(f)$.
- L'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^n / f(u) = 0_{\mathbb{R}^p}\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

On l'appelle *noyau* de f et on le note $\mathrm{Ker}(f)$.

Exemple 4.7

Remarques 4.8

- On peut parfois montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un s.e.v. en l'interprétant comme le noyau ou l'image d'une application linéaire.
- Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et soit λ un scalaire.

Notons E_λ l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(u) = \lambda u$.
On constate que $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id})(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.
On en déduit que E_λ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 4.9

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
f est injective si et seulement sison noyau $\mathrm{Ker}(f)$ se réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Remarques 4.10

- Autrement dit, f est injective si et seulement si : $\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$.
- Toute application linéaire transforme une famille liée en une famille liée.
- Une application linéaire **injective** transforme une famille libre en une famille libre.
- Une application linéaire **surjective** transforme une famille génératrice en une famille génératrice.

4.3 Applications linéaires et matrices

Définition 4.11

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, soit (b) une base de $\mathbb{R}^n$ et soit (b') une base de $\mathbb{R}^p$.
On appelle *matrice représentative* ou matrice associée ou matrice image de f dans les bases (b) et (b') et on note $\mathcal{M}_{bb'}(f)$ la matrice $p \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées dans la base (b') des images par f de chacun des vecteurs de (b).

Exemple 4.12

Remarque 4.13

Propriété 4.14

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, soit (b) une base de $\mathbb{R}^n$, soit (b') une base de $\mathbb{R}^p$. et soit $M = \mathcal{M}_{bb'}(f)$.
Si $u \in \mathbb{R}^n$ a pour coordonnées U dans (b) alors $f(u)$ a pour coordonnées $M \times U$ dans (b').
Autrement dit, $[f(u)]_{(b')} = \mathcal{M}_{bb'}(f) \times [u]_{(b)}$.

Exemple 4.15

Propriété 4.16

Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et si (b) est une base de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{M}_b(f \circ g) = \mathcal{M}_b(f) \times \mathcal{M}_b(g)$.

4.4 Applications linéaires et dimension finie

Théorème 4.17

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
On a : $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f)$.

Remarque 4.18

Le théorème précédent est très souvent utilisé. On appelle *rang* de f la dimension de $\operatorname{Im}(f)$. C'est pourquoi ce résultat est appelé le *théorème du rang*.

Propriété 4.19

Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ alors :
f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

Propriété 4.20

Pour toute base (b) de $\mathbb{R}^n$ et pour tout isomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{M}_b(f^{-1}) = [\mathcal{M}_b(f)]^{-1}$.

Exemple 4.21