Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entrainement **Feuille 1** **Corrigés**

Correction 1

1. (a) $A = 7a - 8b - 2 + 3a - 4b - 5 = 10a - 12b - 7.$

   (b) $B = 7a - 8b + (2 - 3a + 4b) - 5 = 4a - 4b - 3$

2. $B = 4 \times 0,3 - 4 \times (-2) - 3 = 1,2 + 8 - 3 = 6,2$

Correction 2

Rappels : $x^n x^p = x^{n+p}$ $\qquad (x^n)^p = x^{np}$

$\dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$ $\qquad (xy)^n = x^n y^n$

1. $(-2)^7 = (-1 \times 2)^7 = (-1)^7 \times 2^7$

   $(2^2 3^{-4})^5 = (2^2)^5 \times (3^{-4})^5 = 2^{2\times 5} \times 3^{-4\times 5} = 2^{10} \times 3^{-20}$

   De même, $(-3)^2 =(-1)^2 \times 3^2$

   et $(2^3 3^{-7})^{-2} =2^{3\times(-2)} \times 3^{-7\times(-2)} = 2^{-6} \times 3^{14}$

   $$A = \frac{2^5 \times 3^8 \times (-1)^7 \times 2^7 \times 2^{10} \times 3^{-20}}{(-1)^2 \times 3^2 \times 2^4 \times 2^{-6} \times 3^{14}}$$

   $$= \frac{(-1)^7 \times 2^{5+7+10} \times 3^{8-20}}{(-1)^2 \times 2^{4-6} \times 3^{2+14}}$$

   $$= \frac{(-1)^7 \times 2^{22} \times 3^{-12}}{(-1)^2 \times 2^{-2} \times 3^{16}}$$

   $$= (-1)^{7-2} \times 2^{22-(-2)} \times 3^{-12-16}$$

   $$= (-1)^5 \times 2^{24} \times 3^{-28} = -2^{24} \times 3^{-28}$$

2. $12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

   $16 = 4 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

   $36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$

   $54 = 2 \times 27 = 2 \times 3^3$

   $48 = 3 \times 16 = 3 \times 2^4$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{(2^2 \times 3)^5 (2^4)^{-3} (2^2 \times 3^2)^3}{(2 \times 3^3)^3 (2^4 \times 3)^{-5}} \\
&= \frac{2^{10} 3^5 2^{-12} 2^6 3^6}{2^3 3^9 2^{-20} 3^{-5}} \\
&= 2^{10-12+6-3+20} 3^{5+6-9+5} \\
&= 2^{21} 3^7
\end{aligned}
$$

3. Rappel : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{(a^2 b)^{\frac{1}{2}} (ab^2)^{\frac{1}{3}}}{(a^4)^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{6}}} \\
&= \frac{(a^2)^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times (b^2)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} \times b^{\frac{1}{6}}} \\
&= a^{1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} \times b^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \\
&= a^0 \times b^1 = 1 \times b = b
\end{aligned}
$$

Correction 3

Les identités remarquables sont :

$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

1. $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
2. $x^2 + 8x + 12 = x^2 + 8x + 16 - 4 = (x+4)^2 - 2^2 = (x+4-2)(x+4+2) = (x+2)(x+6)$

Correction 4

$$
\begin{aligned}
P &= (4x)^2 - 2 \times (4x) \times (3y) + (3y)^2 - (2x \times y + 2x \times 2 - 3 \times y - 3 \times 2) \\
&= 16x^2 - 24xy + 9y^2 - (2xy + 4x - 3y - 6) \\
&= 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 2xy - 4x + 3y + 6 \\
&= 16x^2 - 26xy + 9y^2 - 4x + 3y + 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q &= (16x^2 - 24xy + 9y^2 - 2x + 3)(y+2) \\
&= 16x^2y - 24xy^2 + 9y^3 - 2xy + 3y + 32x^2 - 48xy + 18y^2 - 4x + 6 \\
&= 16x^2y - 24xy^2 + 9y^3 - 50xy + 3y + 32x^2 + 18y^2 - 4x + 6
\end{aligned}
$$

Correction 5

On effectue la somme des fractions.

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1 \times (x-2)}{(x+2) \times (x-2)} - \frac{2x}{x^2-4} + \frac{3 \times (x+2)}{(x-2) \times (x+2)} \\
&= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{(x+2)(x-2)} + \frac{3x+6}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{x-2-2x+3x+6}{(x+2)(x-2)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2x+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{2 \times (x+2)}{(x+2) \times (x-2)} = \frac{2}{x-2}$$

$B(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Mais attention on doit avoir $x \neq 2$.
Donc $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]2; +\infty[$.
Et $B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 2[$.

Correction 6

Rappel : $vitesse = \dfrac{distance}{temps}$ ou encore $temps = \dfrac{distance}{vitesse}$.

Mais attention, la *distance* doit être donnée en km, le *temps* en heures et décimales d'heures. La *vitesse* est en km/h.
Soit p la longueur du trajet sur le plat et m la longueur du trajet en montée.

La durée du trajet sur le plat est : $\dfrac{p}{20}$ heures.

La durée du trajet en montée est : $\dfrac{m}{12}$ heures.

De plus, le trajet durant 45 mn, on obtient : $\dfrac{p}{20} + \dfrac{m}{12} = \dfrac{3}{4}$.

Ou encore, en multipliant tout par 60, $3p + 5m = 45$.
Puisque le parcours total fait 13 km, on a $p + m = 13$ ou encore $p = 13 - m$.

On remplace dans l'égalité $3p + 5m = 45$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & 3(13-m) + 5m = 45 \\ \Leftrightarrow\ & 39 - 3m + 5m = 45 \\ \Leftrightarrow\ & 2m = 6 \\ \Leftrightarrow\ & m = 3 \end{aligned}$$

Et donc $p = 13 - m = 10$.

Correction 7

Si p est le plus grand des entiers, celui qui le précède est $p - 1$. Et celui encore avant est $p - 2$.

La somme de ces trois entiers est : $p + p - 1 + p - 2 = 3p - 3$

On doit résoudre l'inéquation $12 \leq 3p - 3 \leq 27$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & 15 \leq 3p \leq 30 \\ \Leftrightarrow\ & 5 \leq p \leq 10 \end{aligned}$$

Le plus grand des entiers peut prendre les valeurs 5, 6, 7, 8, 9 ou 10.