



Université de Picardie Jules Verne
UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entraînement

Feuille 4

Enoncés

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(x+7)$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :
$$\begin{cases} x + y &= 30 \\ \ln x + \ln y &= 3 \ln 6 \end{cases}$$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln x)^2 - \frac{72}{(\ln x)^2} = 1$.

Exercice 6

Résoudre le système :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 218 \\ \ln x + \ln y &= \ln 91 \end{cases}$$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes :

(i) $\log_a(b) \times \log_b(c) \times \log_c(d) \times \log_d(a)$. (ii) $\log_{1/5}(1/8)$.

Exercice 8

Simplifier les expressions :

(a) $A = \ln e^3 - \ln e^2$

(b) $B = \ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$.

(c) $C = 5 \ln e^{-1} + 4 \ln(e^2 \sqrt{e})$.

Exercice 9

Déterminer les ensembles de définition, les ensembles de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

- (a) $f(x) = \ln |7 - 2x|$
- (b) $f(x) = \ln(\ln(x))$
- (c) $f(x) = x \ln(x) - x$
- (d) $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

- 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$
- 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{x - 1}$
- 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$

Exercice 11

Donner le tableau de variations de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2x$.

Exercice 12

Etudier et représenter la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(x^2 - 2x + 2)$.

Exercice 13

Etudier et représenter la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1 + \ln(x)}{x}$.

Exercice 14

Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x \ln(x^3 - x^2)$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x \ln(x) + (x - 1) \ln(x - 1)$.

- 1. Etudier et représenter la fonction f .
- 2. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de h , puis calculer $h'(x)$.
- 3. Une machine produit un composé chimique liquide. Pour qu'elle soit rentable, cette machine doit produire au moins 2 hectolitres. De plus, le liquide produit est dangereux et impose une fabrication maximale de 9 hectolitres avant révision de la dite machine.

Pour tout x de $[2, 9]$, la valeur du coût marginal $C(x)$ en milliers d'euros est $C(x) = f(x)$. Le coût total de fabrication $C_T(x)$ est la fonction telle que : $C'_T(x) = C(x)$.

Le coût total des 2 premiers hectolitres (mise en route de la machine et fabrication) est de 10 milliers d'euros, c'est-à-dire que $C_T(2) = 10$.

- (a) Calculer le coût total $C_T(x)$.
- (b) Calculer $C_T(9) - C_T(2)$ (valeur exacte et approchée à l'euro près)
- (c) Donner une interprétation graphique de la question précédente.