Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entrainement **Feuille 5** **Corrigés**

Correction 1

(a) $e^{\ln 3} - e^{\ln 4} = 3 - 4 = -1$

(b) $e^{\frac{1}{2}\ln 9} = e^{\ln 3} = 3$

(c) $e^{\ln x} - \ln e^{2x} = x - 2x = -x$

(d) $e^{\ln(x-1)} - \ln e^4 = x - 1 - 4 = x - 5$

(e) $e^{-x}(e^{2x} + e^x) = e^{-x+2x} + e^{-x+x} = e^x + 1$

Correction 2

(a) $e^{2x+1} = e^{3x^2} \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = 3x^2 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 2x - 1 = 0.$

$\Delta = 4 + 12 = 16 = 4^2$, $x_1 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{6} = 1.$

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}; 1\right\}$

(b) On pose $X = e^x$. Puisque $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$, l'équation devient $X^2 + X - 2 = 0$.

$\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$, $X_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1.$

Mais $X_1 < 0$ ne peut pas convenir donc $e^x = X_2 = 1$ c'est-à-dire $x = 0$.

$\mathcal{S} = \{0\}$

(c) $e^{5x} - 5e^{3x} + 6e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x(e^{4x} - 5e^{2x} + 6) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$

On pose $X = e^{2x}$.

L'équation devient $X^2 - 5X + 6 = 0$.

$\Delta = 25 - 24 = 1 = 1^2$, $x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3.$

D'où $e^{2x} = 2$ ou $e^{2x} = 3$.

C'est-à-dire $2x = \ln 2$ ou $2x = \ln 3$.

Ou encore $x = \dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{\ln\sqrt{2}; \ln\sqrt{3}\right\}$

Correction 3

(a) Les racines du polynôme $(X-3)(1-2X) = -2X^2 + 7X - 3$ sont 3 et $\dfrac{1}{2}$.

De plus, on a $(X-3)(1-2X) > 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2} < X < 3$.

Donc $(e^x - 3)(1 - 2e^x) > 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2} < e^x < 3$.

Soit $\ln \dfrac{1}{2} < x < \ln 3$.

Sachant que $\ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$, on obtient $\mathcal{S} =]-\ln 2; \ln 3[$.

(b) On pose $X = e^x$, l'inéquation devient $3X^2 + 5X + 2 < 0$.

$\Delta = 25 - 24 = 1^2$, $X_1 = \dfrac{-5-1}{6} = -1$ et $X_2 = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Donc $3X^2 - 5X + 2 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ -1 \leq X \leq \dfrac{2}{3}$.

D'où $3e^{2x} + 5e^x + 2 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ -1 \leq e^x \leq \dfrac{2}{3} \ \Leftrightarrow\ e^x \leq \dfrac{2}{3} \ \Leftrightarrow\ x \leq \ln \dfrac{2}{3}$.

$\mathcal{S} = \left]-\infty; \ln \dfrac{2}{3}\right[$.

(c) On pose $X = e^x$, l'inéquation devient $-X^2 - X + 6 \leq 0$.

$\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$, $X_1 = \dfrac{1-5}{-2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1+5}{-2} = -3$.

Donc $-X^2 - X + 6 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ X \leq -3$ ou $X \geq 2$.

On a donc $-e^{2x} - e^x + 6 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ e^x \geq 2 \ \Leftrightarrow\ x \geq \ln 2$

Donc $\mathcal{S} = [\ln 2; +\infty[$.

Correction 4

On pose $X = e^{x+1}$ et $Y = e^{y-2}$.

Le système devient $\left\{ \begin{array}{rcl} X + 2Y & = & 7 \\ 3X - 4Y & = & 1 \end{array} \right.$

Puisque le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10 \neq 0$, on a :

$X = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{-10} = \dfrac{-30}{-10} = 3$ et $Y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-10} = \dfrac{-20}{-10} = 2$.

On a donc $\left\{ \begin{array}{rcl} e^{x+1} & = & 3 \\ e^{y-2} & = & 2 \end{array} \right.$ soit $\left\{ \begin{array}{rcl} x+1 & = & \ln 3 \\ y-2 & = & \ln 2 \end{array} \right.$ et donc $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + \ln 3 \\ y & = & 2 + \ln 2 \end{array} \right.$.

$\mathcal{S} = \{(-1 + \ln 3; 2 + \ln 2)\}$

Correction 5

Puisque $e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $3 + e^x \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

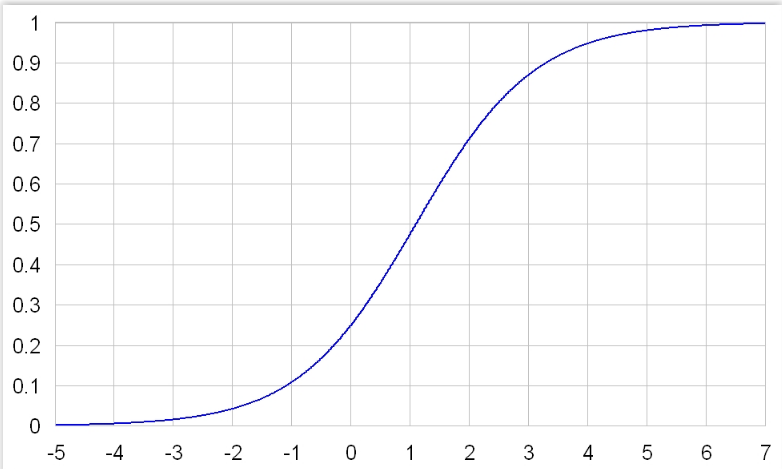
De plus, la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{e^x \times (3+e^x) - e^x \times e^x}{(3+e^x)^2}$ soit $f'(x) = \dfrac{3e^x}{(3+e^x)^2} > 0$ c'est-à-dire f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{3}{e^x} + 1} = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \dfrac{3e^x \times (3+e^x)^2 - 3e^x \times 2 \times e^x \times (3+e^x)}{(3+e^x)^4}$ c'est-à-dire $f''(x) = \dfrac{3e^x \times (3+e^x) - 6e^x \times e^x}{(3+e^x)^3} = \dfrac{3e^x(3-e^x)}{(3+e^x)^3}$ qui est du signe de $3 - e^x$ c'est-à-dire $f''(x) > 0 \iff 3 - e^x > 0 \iff x < \ln 3$.

Donc f est convexe sur $]-\infty; \ln 3[$ et f est concave sur $]\ln 3; +\infty[$.



Correction 6

On a $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ donc $D_f =]0; +\infty[$.

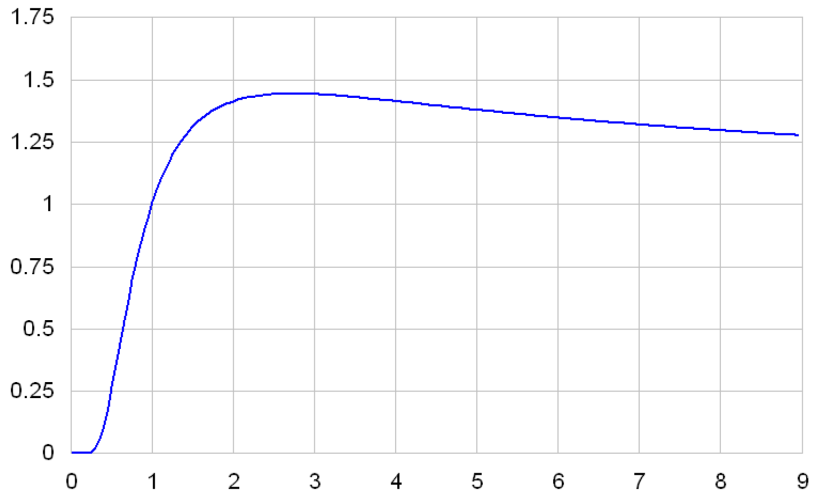
De plus, la fonction f est continue et dérivable sur D_f et $f'(x) = \left(\dfrac{-1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}\ln x}$ c'est-à-dire $f'(x) = \left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

On a donc $f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 1 \iff x \leq e$.

D'où f est croissante sur $]0; e[$ et f est décroissante sur $]e; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



Correction 7

On doit résoudre $P(x) = Q(x)$
Cela donne $30 \times 1,02^x = 40 \times 1,01^x$.

C'est-à-dire $\dfrac{1,02^x}{1,01^x} = \dfrac{40}{30}$ ou encore $\left(\dfrac{1,02}{1,01}\right)^x = \dfrac{4}{3}$

Rappel : $a^x = e^{x \ln a}$.

Ce qui donne $e^{x \ln\left(\frac{1,02}{1,01}\right)} = \dfrac{4}{3}$

Et donc $x \ln\left(\dfrac{1,02}{1,01}\right) = \ln\dfrac{4}{3}$

On obtient $x = \dfrac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{1,02}{1,01}} = \dfrac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 1,02 - \ln 1,01} \sim 29,19$.

Et $P(29) \sim Q(29) \sim 53$.