



Université de Picardie Jules Verne
UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entraînement

Développements limités

Enoncés

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+5} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x+5}}\right)$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+5) \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x+3}\right)$.

Exercice 3

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

Exercice 4

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Exercice 5

Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 en 0 pour la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x \ln x}{x^2}$.

1. Donner un développement limité de f en 1 à l'ordre 3.
2. Donner les valeurs des 3 dérivées successives de f en 1.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sqrt{1+4x} - 1) \times \ln(1+6x)$.

1. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. Donner les valeurs des 3 dérivées successives de f en 0.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

1. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. Donner les valeurs des 3 dérivées successives de f en 0.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 4.
2. Donner les valeurs des 4 dérivées successives de f en 0.

Exercice 10

1. Donner un développement limité de $x \ln(1 - x^2)$ en 0 à l'ordre 3.
2. Donner un développement limité de $1 + x \sin x - \cos x$ en 0 à l'ordre 3.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 - x^2)}{1 + x \sin x - \cos x}$.

Exercice 11

1. Donner un développement limité de $\sin x - x$ en 0 à l'ordre 3.
2. Donner un développement limité de $x - x \cos x$ en 0 à l'ordre 3.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - x \cos x}$.

Exercice 12

Donner un D.L. en $+\infty$ à l'ordre 3 de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x^2 - x + 3}{x^3}$$