# Université de Picardie Jules Verne

***UFR d'économie et de gestion***

# Mathématiques

**Licence 1 - Semestre 2**

**Exercices d'entrainement** **Fonctions de deux variables (3/3)** **Enoncés**

---

**Exercice 1**

Etudier les extrema locaux des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + 3y^2 + 2x - 4y$
2. $g : (x, y) \mapsto 2x^2 + 4xy - 8x + 4y - y^2$
3. $h : (x, y) \mapsto -3x^2 + 2xy + 5x - 10y - 2y^2$

**Exercice 2**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3y - x^2 + 3x + y^2 + 2y$ sous la contrainte $g(x, y) = 2x + y - 1 = 0$. Déterminer les extremums de $f$ :

1. Par substitution
2. En utilisant le multiplicateur de Lagrange.

**Exercice 3**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y^3$ sous la contrainte $g(x, y) = x+y-5 = 0$ avec $x > 0$ et $y > 0$.
Déterminer les extremums de $f$ :

1. Par substitution
2. En utilisant le multiplicateur de Lagrange.

**Exercice 4**

Un industriel produit des biens $A$ et $B$. On désigne par $q_A$ et $q_B$ les quantités respectives de biens $A$ et $B$ produites et par $p_A$ et $p_B$ les prix unitaires de ces 2 biens.
On suppose, de plus, que les fonctions de demande des biens $A$ et $B$ sont décrites par les relations :

$$p_A = 35 - 4q_A \text{ et } p_B = 26 - q_B$$

et que la fonction donnant le coût de la double production est donnée par la relation :

$$c(q_A, q_B) = q_A^2 + q_B^2 + 3q_Aq_B$$

1. Calculer le profit de cet industriel en fonction uniquement des quantités $q_A$ et $q_B$ produites.

2. L'industriel cherchant à réaliser le profit maximum, quelles sont les conditions nécessaires que doivent vérifier $q_A$ et $q_B$ pour qu'il en soit ainsi?

3. Calculer ces valeurs de $q_A$ et $q_B$. Etablir que, pour ces valeurs, le profit est effectivement maximum. Donner sa valeur.

4. Pour des contraintes techniques, les quantités $q_A$ et $q_B$ sont soumises à la contrainte : $2q_A + q_B = 5$.
   Calculer dans ces nouvelles conditions les valeurs de $q_A$ et $q_B$ rendant le profit maximum. Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum et donner sa valeur.