Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Déterminants et matrices** **Enoncés**

Exercice 1

Calculer en les simplifiant et sans utiliser de machine les déterminants suivants :
$a = \begin{vmatrix} 112 & 127 \\ 97 & 110 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} 66 & 106 \\ 41 & 66 \end{vmatrix}$ et $c = \begin{vmatrix} 92 & 72 \\ 74 & 59 \end{vmatrix}$.

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants :
$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ et $d_2 = \begin{vmatrix} -1+i & 1-i & -1 \\ 1-2i & -1+i & -i \\ 2-i & 0 & 1-i \end{vmatrix}$

Exercice 3

Déterminer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -8 & -2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & 7 & -1 & -4 \\ -4 & 16 & -8 & \lambda & 5 \end{pmatrix}$.
Pour quelle(s) valeur(s) du réel λ la matrice A est-elle inversible?

Exercice 5

Déterminer les réels a et b pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & a & 2 \\ b & -2 & -4 \end{pmatrix}$

vérifie $\det A = -50$ et $\operatorname{tr}(A) = 3$.

Exercice 6

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & -11 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -14 & -4 \\ 2 & -12 & 11 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 8

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}$.
   M est-elle inversible?
   Si oui, déterminer M^{-1} sinon calculer M^3.

2. Résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 4z & = & -2 \\ -2x & - & 3y & + & 8z & = & -1 \\ 3x & + & 4y & - & 11z & = & 1 \end{array} \right.$.

Exercice 9

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.

2. Conjecturer une formule générale pour A^n où n est un entier naturel. Démontrer la véracité de votre supposition.

3. Cette formule est-elle valable pour A^{-1}.

Exercice 10

Soient les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et B $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Calculer B^2, B^3 et B^4.

De telles matrices sont dites nilpotentes.

Exercice 11

Soient les matrices réelles $M = \begin{pmatrix} 19 & -3 & 56 \\ -9 & 5 & -32 \\ -5 & 3 & -18 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Le but de cet exercice est de calculer M^n pour un entier n quelconque.

1. Mettre la matrice N sous la forme d'une somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice strictement triangulaire supérieur E.

2. Que peut-on dire de DE et ED?

3. (a) Déteminer D^2, D^3 et D^4 ainsi que E^2, E^3 et E^4.
   (b) En déduire N^2, N^3 et N^4.
   (c) Généraliser ce résultat.
4. (a) Verifier que la matrice P est inversible.
   (b) Déterminer P^{-1}.
5. (a) Calculer $P^{-1}NP$.
   (b) En déduire une expression de M^2 en fonction de N^2. Généraliser ce résultat.