Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$** **Enoncés**

Exercice 1

Etant donnés les vecteurs $a = (-5; 2; 1; -1; 3)$, $b = (1; 0; 3; 2; 4)$ et $c = (0; 2; 1; -1; 3)$ de $\mathbb{R}^5$, calculer les combinaisons linéaires suivantes : $a + b$, $a - b$, $2a + b - c$ et $2(a - b) + 3(b + c) - 5c$.

Exercice 2

Soient les vecteurs $a = (3; 1; -1; 2)$, $b = (1; 0; -2; 3)$ et $c = (-4; -1; 3; -5)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer $a + b + c$. Qu'en déduire sur l'opposé du vecteur a?
2. La famille $\{a, b, c\}$ est-elle libre?
3. Calculer $2(a - 3b) + 5(b + 2c)$.
4. Calculer $a - 4\left(b - \dfrac{1}{2}c\right)$.
5. Déterminer les réels α et β tels que le vecteur $\alpha a + \beta b - c$ ait ses deux premières composantes nulles.

Exercice 3

Soient $a = (1; 2; 3)$, $b = (1; 1; -1)$ et $c = (2; 1; 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Résoudre l'équation $3u - 2a + b = 4(u - c)$ où $u = (x; y; z)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} 2u - 3v & = & 2a - b \\ -u + 2v & = & a + c \end{cases}$.
3. Résoudre l'équation $k.a + \ell.b + m.c = 0$ où $k, \ell, m \in \mathbb{R}$.
4. Soit $w = (1; 7; 16)$. Trouver les réels l_1, l_2 et l_3 tels que $w = l_1.a + l_2.b + l_3.c$

   Rappel : on dit que w est une combinaison linéaire des vecteurs a, b et c.

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang de la famille $\{a, b, c, d, e\}$ où $a = (1; -1; 2; -3)$, $b = (2; 1; -1; 1)$, $c = (5; 4; -5; 6)$, $d = (7; 2; -1; 0)$ et $e = (1; 2; -3; 4)$.

Exercice 5

Soit l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ et soient $u_1 = (1; 2; 1)$ et $u_2 = (1; 0; 2) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F.
3. Soit $G = \text{Vect}(u_1; u_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Ecrire le vecteur $v = (0; 4; -1)$ en fonction d'une famille de 3 vecteurs constituée d'une base de F et d'une base de G.

Exercice 6

Soient les ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de chacun d'eux.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7

Soit $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(b) = (b_1, b_2, b_3)$ la famille de $\mathbb{R}^3$ composée des vecteurs $b_1 = (1, 0, 2)$, $b_2 = (2, 1, -1)$ et $b_3 = (5, 2, -2)$.

1. Montrer que (b) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $[u]_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donner $[u]_e$.
3. Soit $v = (2, 1, -4) \in \mathbb{R}^3$. Donner $[v]_b$.

Exercice 8

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = (x + y - z, 4x + y - 2z, 5x - y - z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. Ces deux s.e.v. sont-ils supplémentaires?

Exercice 9

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(u) = (2x + y, 3x - y)$.

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. L'application f est-elle bijective?
3. Soient $(e) = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soient $b_1 = (1, 1)$ et $b_2 = (-2, 3)$.
   (a) Montrer que $(b) = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner $M_{(b),(e)}(f)$.

(c) $M_{(b),(e)}(f)$ est-elle inversible? Si oui donner son inverse.

Exercice 10

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(u) = (2x+y, 4x+2y)$.

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. L'application f est-elle bijective?
3. Soient $(e) = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soient $b_1 = (1,1)$ et $b_2 = (4,5)$.
   (a) Montrer que $(b) = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner $M_{(b),(e)}(f)$.
   (c) $M_{(b),(e)}(f)$ est-elle inversible? Si oui donner son inverse.

Exercice 11

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(u) = (-2x+y, x+y)$.

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. L'application f est-elle bijective?
3. Soient $(e) = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soient $b_1 = (1,1)$ et $b_2 = (-2,3)$.
   (a) Montrer que $(b) = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner $M_{(b),(e)}(f)$.
   (c) $M_{(b),(e)}(f)$ est-elle inversible? Si oui donner son inverse.

Exercice 12

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(u) = (-2x+y, 4x-2y)$.

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. L'application f est-elle bijective?
3. Soient $(e) = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soient $b_1 = (1,1)$ et $b_2 = (4,5)$.
   (a) Montrer que $(b) = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner $M_{(b),(e)}(f)$.
   (c) $M_{(b),(e)}(f)$ est-elle inversible? Si oui donner son inverse.

Exercice 13

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = (x+y, x-y+z, y-z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

3. L'application f est-elle bijective?

4. Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

   (a) Montrer que $(e) = (e_1, e_2, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (la famille (e) est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

   (b) Déterminer les images de e_1, e_2 et e_3 par f.

   (c) Donner $M_{(e)}(f)$.

5. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$.

   (a) Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

   (c) Déterminer l'ensemble image de F par f c'est-à-dire $f(F)$.