Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Probabilités

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Couple de v.a.r.** **Corrigés**

Correction 1

1. On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

y_i	0	1	4
$p(Y{=}y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2. On a $p\left((X{=}i) \cap (Y{=}j)\right) = 0$ si $j \neq i^2$.

Y \ X	-2	-1	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$

3. $p\left((X{=}1) \cap (Y{=}0)\right) = 0$ et $p(X{=}1) \times p(Y{=}0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \neq 0$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

4. $E(X) = -2 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} = 0,$

   $E(Y) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ et

   $E(XY) = \sum xy \times p\left((X{=}x) \cap (Y{=}y)\right)$

   $$= 0 \times 0 \times \frac{1}{6} - 1 \times 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 \times \frac{1}{4} - 2 \times 4 \times \frac{1}{6} + 2 \times 4 \times \frac{1}{6}$$
   $$= 0.$$

   Donc $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.

   On peut remarquer que, même si les v.a.r. ne sont pas indépendantes, elles ont une covariance nulle.

Correction 2

1. On a $X(\Omega) = [\![1;4]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;4]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.
   - Si $j > k$ alors $p\left((X{=}k) \cap (Y{=}j)\right) = 0$.
   - Si $j \leq k$ alors $p\left((X{=}k) \cap (Y{=}j)\right) = p(X{=}k) \times p(Y{=}j)_{|(X=k)} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{4k}$.

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $p(X{=}Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} p\left((X{=}k) \cap (Y{=}k)\right) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}$.

   Ou encore :

   $p(X{=}Y) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{12+6+4+3}{48} = \dfrac{25}{48}$

3. Il s'agit de la loi marginale de Y.

   On a $p(Y{=}1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{25}{48}$

   $p(Y{=}2) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{6+4+3}{48} = \dfrac{13}{48}$

   $p(Y{=}3) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{4+3}{48} = \dfrac{7}{48}$

   $p(Y{=}4) = \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{48}$

   $E(Y) = \dfrac{1 \times 25 + 2 \times 13 + 3 \times 7 + 4 \times 3}{48} = \dfrac{84}{48} = \dfrac{7}{4}$.

Correction 3

1. (a) On a $X(\Omega) = [\![1;4]\!]$ et comme il y a $1+2+3+4 = 10$ boules dans l'urne en tout, pour tout $k \in X(\Omega)$ on a $p(X{=}k) = \dfrac{k}{10}$.

   (b) $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} kp(X{=}k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{k^2}{10} = \frac{1}{10} \times (1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2) = \frac{1}{10} \times 30 = 3$.

2. (a) On a $Y(\Omega) = Z(\Omega) = [\![1;4]\!]$.

   Soient k et j deux éléments de $[\![1;4]\!]$.

   - Si $k \neq j$, on a $p\left((Y{=}k) \cap (Z{=}j)\right) = \dfrac{k}{10} \times \dfrac{j}{9}$

- Si $k=j$, on a $p\left((Y{=}k)\cap(Z{=}k)\right)=\dfrac{k}{10}\times\dfrac{k-1}{9}$.

$Y \backslash Z$	1	2	3	4	Loi de Y
1	0	$\frac{2}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{9}{90}$
2	$\frac{2}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{18}{90}$
3	$\frac{3}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{27}{90}$
4	$\frac{4}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{36}{90}$
Loi de Z	$\frac{9}{90}$	$\frac{18}{90}$	$\frac{27}{90}$	$\frac{36}{90}$	1

(b) Voir tableau ci-dessus.

(c) On a $p\left((Y{=}1)\cap(Z{=}1)\right)=0$ et $p(Y{=}1)\times p(Z{=}1)=\dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$ donc les variables Y et Z ne sont pas indépendantes.

(d)

$Y+Z$	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	0	$\frac{4}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{22}{90}$	$\frac{24}{90}$	$\frac{12}{90}$

$E(Y+Z)=2\times 0+3\times\dfrac{4}{90}+\ldots+7\times\dfrac{24}{90}+8\times\dfrac{12}{90}=\dfrac{540}{90}=6.$

$E(Y)=\dfrac{1\times 9+2\times 18+3\times 27+4\times 36}{90}=3=E(Z).$

On a donc $E(Y+Z)=E(Y)+E(Z)$.

Correction 4

1. On a $X(\Omega)=[\![1;4]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![2;5]\!]$.
   Soit $i\in X(\Omega)$ et $j\in Z(\Omega)$.
   - Si $i\geq j$ alors $p\left((X{=}i)\cap(Y{=}j)\right)=0$.
   - Si $i<j$ alors $(X{=}i)\cap(Y{=}j)$ signifie que l'on a tiré $i-1$ boules rouges puis une boule blanche pour continuer sur $j-i-1$ boules rouges et enfin une boule blance.

   $p\left((X{=}1)\cap(Y{=}2)\right)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$

   $p\left((X{=}1)\cap(Y{=}3)\right)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{10}$

   $p\left((X{=}1)\cap(Y{=}4)\right)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}=p\left((X{=}1)\cap(Y{=}5)\right)$

   $p\left((X{=}2)\cap(Y{=}3)\right)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{10}$

   $p\left((X{=}2)\cap(Y{=}4)\right)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}=p\left((X{=}2)\cap(Y{=}5)\right)$

$$p\left((X{=}3)\cap(Y{=}4)\right) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{10} = p\left((X{=}2)\cap(Y{=}5)\right)$$
$$p\left((X{=}4)\cap(Y{=}5)\right) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$X \backslash Y$	2	3	4	5	Loi de Y
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
4	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
Loi de X	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1