Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entrainement **Optimisation** **Corrigés**

Correction 1

a. Il faut que $x^2 + y^2 > 0$ c'est-à-dire $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Donc $D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

$f'_x(x, y, z) = \dfrac{2xz}{x^2 + y^2}$

$f'_y(x, y, z) = \dfrac{2yz}{x^2 + y^2}$

$f'_z(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)$

b. Il faut que $y \geq 0$.

Donc $D_g = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Rappel : $\sqrt{y^5} = y^{5/2}$ et $\sqrt{y^3} = y^{3/2}$

$g'_x(x, y, z) = 2\sqrt{y^5} + 3z^2 e^{x^3} + 9x^3 z^2 e^{x^3}$

$g'_y(x, y, z) = 5x\sqrt{y^3}$

$g'_z(x, y, z) = 6xze^{x^3}$

c. Il faut que $z > 0$.

Donc $D_g = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$.

$h'_x(x, y, z) = 6e^y\sqrt{z}$

$h'_y(x, y, z) = 6xe^y\sqrt{z} - \dfrac{1}{z^2}$

$h'_z(x, y, z) = \dfrac{3xe^y}{\sqrt{z}} + \dfrac{2y}{z^3}$

Correction 2

$f'_x(x, y, z) = 2x^3 + 4y$, $f'_y(x, y, z) = 4x + 2y$ et $f'_z(x, y, z) = 2z - 2$.

On a $\left\{\begin{array}{lcl} f'_x(x,y,z) & = & 0 \\ f'_y(x,y,z) & = & 0 \\ f'_z(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ y & = & 4 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & -4 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$

Il y a donc trois points critiques : $a = (0, 0, 1)$, $b = (-2, 4, 1)$ et $c = (2, -4, 1)$.

$f''_{x^2}(x,y,z) = 6x^2$
$f''_{y^2}(x,y,z) = 2$
$f''_{z^2}(x,y,z) = 2$
$f''_{xy}(x,y,z) = f''_{yx}(x,y,z) = 4$
$f''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z) = 0$
$f''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = 0$

La matrice hessienne de f en a est $H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc a est un point col.

La matrice hessienne de f en b et en c est $H = H_f(b) = H_f(c) = \begin{pmatrix} 24 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a :

$|H|_1 = 24 > 0$
$|H|_2 = \begin{vmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 32 > 0$
$|H|_3 = 2 \times \begin{vmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 64 > 0$
La fonction f admet donc un minimum local en b et en c.

Correction 3

$f'_x(x,y,z) = 2xe^{x^2}$, $f'_y(x,y,z) = 2y - 2z$ et $f'_z(x,y,z) = -2y + 4z - 2$.

On a $\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y,z) & = & 0 \\ f'_y(x,y,z) & = & 0 \\ f'_z(x,y,z) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{array} \right.$

Il y a donc un seul point critique : $a = (0,1,1)$.

$f''_{x^2}(x,y,z) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (2+4x^2)e^{x^2}$
$f''_{y^2}(x,y,z) = 2$
$f''_{z^2}(x,y,z) = 4$
$f''_{xy}(x,y,z) = f''_{yx}(x,y,z) = 0$
$f''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z) = 0$
$f''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = -2$

La matrice hessienne de f en a est $H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

On a :

$|H_f(a)|_1 > 0$
$|H_f(a)|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$
$|H_f(a)|_3 = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$
La fonction f admet donc un minimum local en a.

Correction 4

$f'_x(x,y,z) = 2xy\ln(z)e^{x^2+y^2} + 2x = 2x\left(y\ln(z)e^{x^2+y^2} + 1\right)$

$f'_y(x,y,z) = 1 \times \ln(z)e^{x^2+y^2} + y\ln(z)2ye^{x^2+y^2} = (1+2y^2)\ln(z)e^{x^2+y^2}$
$f'_z(x,y,z) = \dfrac{y}{z}e^{x^2+y^2}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'_x(x,y,z) & = & 0 \\ f'_y(x,y,z) & = & 0 \\ f'_z(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x\left(y\ln(z)e^{x^2+y^2}+1\right) & = & 0 \\ (1+2y^2)\ln(z)e^{x^2+y^2} & = & 0 \\ \dfrac{y}{z}e^{x^2+y^2} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le seul point critique est $a = (0;0;1)$.
$f''_{x^2}(x,y,z) = 2\left(y\ln(z)e^{x^2+y^2}+1\right) + 2x\left(y\ln(z)2xe^{x^2+y^2}\right)$
$f''_{x^2}(0,0,1) = 2$

$f''_{y^2}(x,y,z) = 4y\ln(z)e^{x^2+y^2} + (1+2y^2)\ln(z)2ye^{x^2+y^2}$
$f''_{y^2}(0,0,1) = 0$

$f''_{z^2}(x,y,z) = -\dfrac{y}{z^2}e^{x^2+y^2}$
$f''_{z^2}(0,0,1) = 0$

$f''_{xy}(x,y,z) = f''_{yx}(x,y,z) = (1+2y^2)\ln(z)2xe^{x^2+y^2}$
$f''_{xy}(0,0,1) = 0$

$f''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z) = \dfrac{y}{z}2xe^{x^2+y^2}$
$f''_{xz}(0,0,1) = 0$

$f''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = \dfrac{1+2y^2}{z}e^{x^2+y^2}$
$f''_{yz}(0,0,1) = 1$

La matrice hessienne de g en a est donc $H_g(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $|H_f(a)|_2 = 0$, la matrice hessienne n'est ni définie positive ni définie négative (elle est juste positive).

Correction 5

a. On a $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 1-x$.
Donc $h(x) = f(x, 1-x) = x^3(1-x)^2 = x^5 - 2x^4 + x^3$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = x^2(5x^2 - 8x + 3)$
$\Delta = 64 - 4 \times 5 \times 3 = 4 = 2^2$.
Les racines de $5x^2 - 8x + 3$ sont $x_1 = \dfrac{8-2}{10} = \dfrac{3}{5}$ et $x_2 = \dfrac{8+2}{10} = 1$.
Les points critiques sont obtenus pour $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = 0$ c'est-à-dire $M_1\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$, $M_2\,(1,0)$ et $M_3\,(0,1)$.
De plus, $h'(x) < 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 8x + 3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5} < x < 1$.
On obtient donc que M_1 est un maximum, M_2 est un minimum et M_3 est un point col.

b. On pose $L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^3y^2 + \lambda(x+y-1)$.

$L'_x(\lambda, x, y) = 3x^2y^2 + \lambda$
$L'_y(\lambda, x, y) = 2x^3y + \lambda$
$L'_\lambda(\lambda, x, y) = g(x, y) = x + y - 1$

$$\left\{\begin{array}{lcccl} L'_x(\lambda, x, y) & = & 0 & = & 3x^2y^2 + \lambda \\ L'_y(\lambda, x, y) & = & 0 & = & 2x^3y + \lambda \\ L'_\lambda(\lambda, x, y) & = & 0 & = & x + y - 1 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & = & -3x^2y^2 & & \\ 2x^3y - 3x^2y^2 & = & x^2y(2x - 3y) & = & 0 \\ x + y - 1 & = & 0 & & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ \lambda & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \dfrac{3}{5} \\ y & = & \dfrac{2}{5} \\ \lambda & = & -\dfrac{108}{625} \end{array}\right.$$

Soit les mêmes points critiques $M_1\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$, $M_2\,(1, 0)$ et $M_3\,(0, 1)$.

$L''_{\lambda^2}(\lambda, x, y) = 0$
$L''_{x^2}(\lambda, x, y) = 6xy^2$
$L''_{y^2}(\lambda, x, y) = 2x^3$
$L''_{x\lambda}(\lambda, x, y) = 1$
$L''_{y\lambda}(\lambda, x, y) = 1$
$L''_{xy}(\lambda, x, y) = 6x^2y$

La matrice hessienne bordée du Lagrangien est $\overline{H}_L(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6xy^2 & 6x^2y \\ 1 & 6x^2y & 2x^3 \end{pmatrix}$.

Rappel : (Ici $n = 2$)

i Si les $n - 1$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $\overline{H}_L(\lambda, x, y)$ évalué au point critique M sont alternativement > 0 et < 0, le dernier d'entre eux étant de même signe que $(-1)^n$ alors M est un maximum local.

ii Si les $n-1$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $\overline{H}_L(\lambda, x, y)$ évaluée au point critique M sont tous < 0, alors M est un minimum local.

On a juste à calculer $\det(\overline{H}_L(\lambda, x, y)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6xy^2 & 6x^2y \\ 1 & 6x^2y & 2x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6xy^2 - 6x^2y & 6x^2y - 2x^3 \\ 1 & 6x^2y & 2x^3 \end{vmatrix}$

$$= 2x(6xy - 3y^2 - x^2)$$

En M_1, on obtient $\det\left(\overline{H}_L\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{5}, 0\right)\right) = \dfrac{18}{25} > 0$, c'est donc un maximum.

En M_2, on obtient $\det(\overline{H}_L(1, 0, 0)) = -2 < 0$, c'est donc un minimum.

En M_3, on obtient $\det(\overline{H}_L(0, 1, 0)) = 0$, c'est donc point col.

Correction 6

a. On a $g(x,y)=0 \Leftrightarrow y=2x-1$.

Donc $h(x)=f(x,2x-1)=x^3(2x-1)-x^2+6x+(2x-1)^2-(2x-1)=2x^4-x^3+3x^2+2$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=8x^3-3x^2+6x=x(8x^2-3x+6)$

$\Delta=9-4\times 6\times 8<0$.

Le polynôme $8x^2-3x+6$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$: il est toujours positif.

Le seul points critique est obtenu pour $x=0$ c'est-à-dire $a=(0;-1)$.

De plus, $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$.

On obtient donc que f admet un minimum a.

b. On pose $L(\lambda,x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^3y-x^2+6x+y^2-y+\lambda(2x-y-1)$.

$L'_x(\lambda,x,y)=3x^2y-2x+6+2\lambda$
$L'_y(\lambda,x,y)=x^3+2y-1-\lambda$
$L'_\lambda(\lambda,x,y)=g(x,y)=2x-y-1$

$$\left\{\begin{array}{lclcl} L'_x(\lambda,x,y) & = & 0 & = & 3x^2y-2x+6+2\lambda \qquad L_1 \leftarrow L_1+2L_2 \\ L'_y(\lambda,x,y) & = & 0 & = & x^3+2y-1-\lambda \\ L'_\lambda(\lambda,x,y) & = & 0 & = & 2x-y-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 8x^3-3x^2+6x & = & 0 \qquad \text{(équation résolue dans la question a.)} \\ \lambda & = & x^3+2y-1 \\ y & = & 2x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} x & = & 0 \\ y & = & -1 \\ \lambda & = & 1 \end{array}\right.$$

Soit le même point critique $a=(0;-1;1)$.

$L''_{\lambda^2}(\lambda,x,y)=0$
$L''_{x^2}(\lambda,x,y)=6xy-2$
$L''_{y^2}(\lambda,x,y)=2$
$L''_{x\lambda}(\lambda,x,y)=2$
$L''_{y\lambda}(\lambda,x,y)=-1$
$L''_{xy}(\lambda,x,y)=3x^2$

La matrice hessienne bordée du Lagrangien est $\overline{H}_L(\lambda,x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6xy-2 & 3x^2 \\ -1 & 3x^2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overline{H}_L(\lambda,x,y))=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6xy-2 & 3x^2 \\ -1 & 3x^2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 6x^2+6xy-2 & 3x^2 \\ -1 & 3x^2+4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 2 & 6x^2+6xy-2 \\ -1 & 3x^2+4 \end{vmatrix}=-(6x^2+8+6x^2+6xy-2)=-(12x^2+6xy+6)$$

En a, on obtient $\left|\overline{H}_L(a)\right|=-6<0$, c'est f admet un minimum en a.

Correction 7

Remarque : d'après l'ensemble de définition, on a $z\neq 0$.
On pose $A=\left(1,-1;-1;\sqrt[3]{2}\right)$.

1. On pose $L(\lambda,x,y,z) = x^2y^2 + z^3 + \lambda(2x+2y-z^3+6)$
   $L'_\lambda(\lambda,x,y,z) = 2x+2y-z^3+6$
   $L'_x(\lambda,x,y,z) = 2xy^2+2\lambda$
   $L'_y(\lambda,x,y,z) = 2yx^2+2\lambda$
   $L'_z(\lambda,x,y,z) = 3z^2-3z^2\lambda = 3z^2(1-\lambda)$

   On a : $\begin{array}{lclclcl} L'_\lambda(A) & = & 2(-1)+2(-1)-(\sqrt[3]{2})^3+6 & = & -2-2-2+6 & = & 0 \\ L'_x(A) & = & 2(-1)(-1)^2+2 & = & -2+2 & = & 0 \\ L'_y(A) & = & 2(-1)(-1)^2+2 & = & -2+2 & = & 0 \\ L'_z(A) & = & 3(\sqrt[3]{2})^2(1-1) & = & 3(\sqrt[3]{2})^2\times 0 & = & 0 \end{array}$.

   Le point A est donc bien un point critique.

2. On calcule les dérivées secondes.

   $L''_{x^2}(\lambda,x,y,z) = 2y^2$ $\quad L''_{xy}(\lambda,x,y,z) = 4xy$ $\quad L''_{yz}(\lambda,x,y,z) = 0$

   $L''_{y^2}(\lambda,x,y,z) = 2x^2$ $\quad L''_{xz}(\lambda,x,y,z) = 0$ $\quad L''_{y\lambda}(\lambda,x,y,z) = 2$

   $L''_{z^2}(\lambda,x,y,z) = 6z(1-\lambda)$ $\quad L''_{x\lambda}(\lambda,x,y,z) = 2$ $\quad L''_{z\lambda}(\lambda,x,y,z) = -3z^2$

   $L''_{\lambda^2}(\lambda,x,y,z) = 0$

   La matrice hessienne bordée du Lagrangien est
   $$\overline{H}_L(\lambda,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -3z^2 \\ 2 & 2y^2 & 4xy & 0 \\ 2 & 4xy & 2x^2 & 0 \\ -3z^2 & 0 & 0 & 6z(1-\lambda) \end{pmatrix}.$$

3. Nature du point critique.

   Au point A, on a : $\overline{H}_L(A) = \overline{H}_L\left(1;-1;-1;\sqrt[3]{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -3\sqrt[3]{4} \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -3\sqrt[3]{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|\overline{H}_L(A)|_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

Et $|\overline{H}_L(A)|_4 = \det(\overline{H}_L(A)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & -3\sqrt[3]{4} \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -3\sqrt[3]{4} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt[3]{4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3\sqrt[3]{4} \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -9\sqrt[3]{16}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 108\sqrt[3]{16} > 0$$

   Le point A n'est ni un minimum ni un maximum.

Correction 8

On pose $L(\lambda,x,y,z) = x\ln x^2 + y\ln y + z\ln z + \lambda(x+y+z-6)$

$L'_\lambda(\lambda,x,y,z) = x+y+z-6$
$L'_x(\lambda,x,y,z) = \ln x^2+2+\lambda$
$L'_y(\lambda,x,y,z) = \ln y+1+\lambda$
$L'_z(\lambda,x,y,z) = \ln z+1+\lambda$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z-6 & = & 0 \\ \ln x^2+2+\lambda & = & 0 \\ \ln y+1+\lambda & = & 0 \\ \ln z+1+\lambda & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z-6 & = & 0 \\ \ln x^2 - \ln y + 1 & = & 0 \\ \ln y+1+\lambda & = & 0 \\ z & = & y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2y & = & 6-x \\ \ln ex^2 & = & \ln y \\ z & = & y \\ \ln z+1+\lambda & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2y & = & 6-x \\ 2ex^2-2y & = & 0 \\ z & = & y \\ \ln z+1+\lambda & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2y & = & 6-x \\ 2ex^2+x-6 & = & 0 \\ z & = & y \\ \ln z+1+\lambda & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour l'équation du second degré $2ex^2+x-6=0$, on a $\Delta = 1+48e$.
On obtient $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+48e}}{4e} \approx -1,15$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+48e}}{4e} \approx 0,96$.
On obtient y, z et λ en conséquence. Et donc deux points critiques $a = (\lambda_1; -1,15;\ 3,58;\ 3,58)$ et $b = (\lambda_2; 0,96;\ 2,52;\ 2,52)$.

$$\begin{array}{lll} L''_{\lambda^2}(\lambda,x,y,z) = 0 & L''_{xy}(\lambda,x,y,z) = 0 & L''_{yz}(\lambda,x,y,z) = 0 \\ L''_{x^2}(\lambda,x,y,z) = \dfrac{2}{x} & L''_{xz}(\lambda,x,y,z) = 0 & L''_{y\lambda}(\lambda,x,y,z) = 1 \\ L''_{y^2}(\lambda,x,y,z) = \dfrac{1}{y} & L''_{x\lambda}(\lambda,x,y,z) = 1 & L''_{z\lambda}(\lambda,x,y,z) = 1 \\ L''_{z^2}(\lambda,x,y,z) = \dfrac{1}{z} & & \end{array}$$

La matrice hessienne bordée du Lagrangien est $\overline{H}_L(\lambda,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{x} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$.

$$|\overline{H}_L(\lambda,x,y,z)|_3 = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{2}{xyz}.$$

$$|\overline{H}_L(\lambda,x,y,z)|_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{x} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{x} & -\frac{1}{y} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{x} & -\frac{1}{y} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3;\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{x} & -\frac{1}{y}-\frac{2}{x} & -\frac{2}{x} \\ 0 & -\frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{y}-\frac{2}{x} & -\frac{2}{x} \\ -\frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = -\frac{2}{xy} - \frac{2}{xz} - \frac{1}{yz}$$

- $|\overline{H}_L(a)|_3 < 0$ (produit d'un terme négatif et deux positifs)

  $|\overline{H}_L(a)|_4 \approx 0,47 > 0$

Donc le point a est un point col.

- $|\overline{H}_L(b)|_3 > 0$

  $|\overline{H}_L(b)|_4 < 0$

Donc f admet un maximum local au point b.