

Probabilités

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entraînement

V.a.r à densité

Enoncés

Exercice 1

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité.

Si oui, déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. associée à cette densité.

$$1. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 4t^{-5} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$2. g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$3. h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t/2} (1 - e^{-t/2})^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit X une v.a.r. dont la densité est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; 1[\\ \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2} & \text{si } t \in [1, 2] \\ \frac{2}{t^4} + \frac{1}{e^t} & \text{si } t \in]2; +\infty[\end{cases}.$$

1. Déterminer F la fonction de répartition de X .
2. Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$.
3. Calculer $E(X)$ l'espérance de X .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]1; 2] \\ \frac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1; 2] \end{cases}$

Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

Exercice 4

Déterminer si les fonctions suivantes sont les fonctions de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$$

Exercice 5

Calculer, si elle existe, l'espérance de la variable X dont une densité est :

$$1. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 4t^{-5} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$2. g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$3. h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{4 \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Calculer, si elle existe, la variance de la variable X dont une densité est $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 4t^{-5} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{6}e^{-\frac{|x-1|}{3}}$.

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X .
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable X .
3. Calculer la probabilité de l'événement $(0 \leq X \leq 3)$.
4. Calculer, si elle existe, l'espérance de X .
5. Calculer, si elle existe, la variance de X .