Suites

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons essentiellement aux suites réelles. Toutefois certaines définitions et propriétés sont généralisables aux suites à valeurs dans d'autres ensembles par exemple les nombres complexes.

1 Suites d'éléments d'un ensemble quelconque

Définition 1.1

Soit E un ensemble.
Une *suite* d'éléments de E est une application u de $\mathbb{N}$ dans E.
L'image par u de l'entier n n'est plus notée $u(n)$ mais u_n. Elle est appelée *terme d'indice* n, ou *terme général* de la suite u, et u_0 en est le *terme initial*. La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemples 1.2

Remarques 1.3

- On parle de *suite réelle* si $E = \mathbb{R}$ et de *suite complexe* si $E = \mathbb{C}$.
- On pourrait, pour les suites, considérer non plus les applications mais les fonctions de $\mathbb{N}$ dans E.
  En particulier, on parle de suite définies à partir d'un certain rang n_0.
  Les définitions et propriétés qui vont suivre seront données pour des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, mais elles peuvent être adaptées aux suites $(u_n)_{n\geq n_0}$, avec simplement des changements de notation.

Définition 1.4

Soient u et v deux suites de E.
On a $u = v \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$.

Remarque 1.5

Remarque 1.6

2 Suites extraites

Définition 2.1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un ensemble E.
On appelle *suite extraite* de la suite u toute suite v de E dont le terme général peut s'écrire $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarques 2.2

- Si $\varphi(n) = n + p$ ($p \in \mathbb{N}$), la suite v est $(u_n)_{n \geq p}$ (son terme initial est u_p).
- La suite extraite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ est la suite des termes d'indices pairs : $\varphi(n) = 2n$.
- La suite extraite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est la suite des termes d'indices impairs : $\varphi(n) = 2n + 1$.

Exemple 2.3

3 Suites périodiques ou stationnaires

Définition 3.1

Soit u une suite réelle.
- On dit que u est *constante* s'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a$.
- On dit que u est *stationnaire* s'il existe a dans $\mathbb{R}$ et n_0 dans $\mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq n_0,\ u_n = a$.

Exemple 3.2

Définition 3.3

Soit u une suite réelle.
On dit que u est *périodique* s'il existe un entier strictement positif p tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.
Si un entier p satisfait à cette propriété, alors tous ses multiples y satisfont aussi.
La période de la suite u est alors l'entier positif minimum p_0 qui vérifie cette propriété.
On dit alors que la suite u est *p_0-périodique*.

Exemples 3.4

Remarques 3.5

- Les suites constantes sont les suites 1-périodiques.
- Par abus, on note $u = a$ où u est une suite et $a \in \mathbb{R}$ pour exprimer que u est une suite constante dont chacun des termes est égal à a.
- Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est p-périodique, alors :
$\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \{u_n, n \in [0, p-1]\} = \{u_n, n \in [n_1, n_1 + p - 1]\}$ pour tout entier positif n_1.

4 Suites définies par récurrence

Définition 4.1

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit a un réel.
On peut définir une suite u par :
1. La donnée de son terme initial $u_0 = a$.
2. La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que la suite u est définie *par récurrence* (de pas 1).

Remarque 4.2

Exemple 4.3

Remarque 4.4

On peut également définir des suites par des récurrences de pas 2 (ou supérieur), c'est-à-dire en se donnant les deux termes initiaux u_0 et u_1 et une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

où f est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exemple 4.5

5 Généralités sur les suites réelles

Définition 5.1

Soient u et v deux suites réelles et soit λ un réel.
On définit la suite somme $s = u+v$ et la suite produit $p = uv$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n+v_n,$ et $p_n = u_n v_n$.
On définit la suite λu par $\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda u)_n = \lambda u_n$.

Remarques 5.2

Définition 5.3

Soit u une suite de nombres réels. On dit que u est :
croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.
monotone si et seulement sielle est croissante ou décroissante.
strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.
strictement monotone si et seulement sielle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques 5.4

On a donc une définition équivalente à celle des fonctions :
- u croissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n \ \Rightarrow\ u_m \leq u_n$.
- u décroissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n \ \Rightarrow\ u_m \geq u_n$.
- u strictement croissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n \ \Rightarrow\ u_m < u_n$
- u strictement décroissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n \ \Rightarrow\ u_m > u_n$.

Remarque 5.5

On peut remarquer que $u_{n+1} \leq u_n \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} - u_n \leq 0$ ou que $u_{n+1} \leq u_n \ \Leftrightarrow\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ lorsque $u_n > 0$.
Pour étudier la monotonie (croissance, décroissance ou constance) d'une suite, on peut donc :

1. Déterminer $u_{n+1} - u_n$ et comparer avec 0.
2. Si cela est possible c'est-à-dire si $u_n \neq 0$, déterminer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et comparer avec 1.

Propriété 5.6

Soit f une fonction numérique réelle dérivable sur $[0, +\infty[$ et soit u la suite définie par $u_n = f(n)$.
- Si $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors u est croissante.
- Si $f' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors u est décroissante.

Exemple 5.7

Propriété 5.8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier et soit f une fonction définie sur I.
Si u est une suite de I définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :
Si f est strictement croissante et si $u_0 < u_1$ alors la suite u est strictement croissante.
Si f est strictement croissante et si $u_0 > u_1$ alors la suite u est strictement décroissante.

Remarque 5.9

Exemple 5.10

Définition 5.11

Soit u une suite réelle.
On dit que la suite u est *majorée* si et seulement si$\exists\, M \in \mathbb{R}$ / $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
On dit que la suite u est *minorée* si et seulement si$\exists\, m \in \mathbb{R}$ / $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
On dit que la suite u est *bornée* si et seulement sielle est à la fois majorée et minorée.

Remarques 5.12

- u est majorée $\Leftrightarrow$ l'ensemble de ses valeurs est majoré dans $\mathbb{R}$.
- u est minorée $\Leftrightarrow$ l'ensemble de ses valeurs est minoré.
- Une suite réelle u est bornée si et seulement siil existe un réel $M \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.
- Les suites constantes, stationnaires ou périodiques, sont des suites bornées parce qu'elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.
- Notons $-u$ la suite de terme général $-u_n$. Pour les deux suites u et $-u$:
  L'une est minorée $\Leftrightarrow$ l'autre est majorée
  L'une est croissante $\Leftrightarrow$ l'autre est décroissante.
  L'une est strictement croissante $\Leftrightarrow$ l'autre est strictement décroissante.

Cette remarque permet de se ramener à des suites croissantes et/ou majorées.

6 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Définition 6.1

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmétique* s'il existe un réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé *raison* de la suite arithmétique. Il est défini de façon unique.

Remarques 6.2

Propriété 6.3

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison r alors, our tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement, on a $\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r$.

Remarque 6.4

Réciproquement, si le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'écrit $u_n = a + nb$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Propriété 6.5

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ arithmétique de raison r est :
$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$.

Remarque 6.6

Plus généralement, la somme de n termes successifs est $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n-1} u_k = \frac{n}{2}(u_m + u_{m+n-1})$.

Exemple 6.7

Définition 6.8

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *géométrique* s'il existe un réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la *raison* de la suite géométrique (il est défini de façon unique, à moins que u_0 ne soit nul, auquel cas la suite u est identiquement nulle, ce qui n'a pas beaucoup d'intérêt).

Remarques 6.9

Avec les notations de la définition 6.8, on a :
- La suite u est constante si $q = 1$; elle est stationnaire en 0 (à partir de $n = 1$) si $q = 0$.
- Si $q > 0$, la suite u garde un signe constant et est monotone. Plus précisément :
 Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite u est positive strictement croissante.
 Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite u est positive strictement décroissante.
 Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite u est négative strictement décroissante.
 Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite u est négative strictement croissante.
- Si $q < 0$, alors pour tout n les termes u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. La suite u n'est donc pas monotone.

Propriété 6.10

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 q^n$.
Plus généralement, on a $\forall n, p \in \mathbb{N},\ p \leq n \ \Rightarrow\ u_n = u_p q^{n-p}$.

Remarque 6.11

Réciproquement, si le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'écrit $u_n = aq^n$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q.

Propriété 6.12

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ géométrique de raison q est :
- Si $q \neq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si $q = 1$, $S_n = (n+1)u_0$ (c'est aussi une suite arithmétique de raison 0).

Remarque 6.13

Plus généralement, si $q \neq 1$, la somme de n termes successifs est : $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n-1} u_k = u_m \frac{1-q^n}{1-q}$.

Exemple 6.14

Définition 6.15

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *arithmético-géométrique* si : $\exists\, a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Remarques 6.16

- Si $b = 0$, c'est une suite géométrique.
- Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique.
- Supposons $a \neq 1$: soit α l'unique réel vérifiant $\alpha = a\alpha + b$ (donc $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$).
  Alors la suite de terme général $u_n - \alpha$ est géométrique de raison a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$.
  On en déduit l'expression générale de u_n : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$.

Exemple 6.17

7 Limites

Les propriétés de limite de somme, produit, quotient, composition de suites sont les mêmes que pour les fonctions. De même pour les règles de comparaison.
Bien que le sujet soit bien plus vaste, on utilisera essentiellement les trois propriétés suivantes pour déterminer la limite d'une suite.

Propriété 7.1

Soit f une fonction numérique réelle et soit u la suite de terme général $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existe alors c'est aussi la valeur de $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Remarque 7.2

Propriété 7.3

Soit u une suite croissante.
- Si u est majorée alors u converge vers un réel.
- Si u n'est pas majorée alors u tend vers $+\infty$.

Soit u une suite décroissante.
- Si u est minorée alors u converge vers un réel.
- Si u n'est pas minorée alors u tend vers $-\infty$.

Propriété 7.4

Soit f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit u une suite de I définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si u converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque 7.5

Remarques 7.6

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ (fini) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - l = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - l| = 0$
- Si une suite n'admet pas de limite quand n tend vers l'infini, on dit qu'elle diverge.

Propriété 7.7

La limite d'une suite est unique.

Propriété 7.8

Une suite qui converge vers l fini est bornée.

Propriété 7.9

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient u et v deux suites telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \text{ (fini) } \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = l' \text{ (fini) }.$$

Alors :

(i) $u + v$ converge vers $l + l'$

(ii) $u \times v$ converge vers $l \times l'$.

(iii) λu converge vers λl.

(iv) Si $l \neq 0$ et si $\dfrac{1}{u}$ est bien définie, alors $\dfrac{1}{u}$ converge vers $\dfrac{1}{l}$.

(v) Si $l' \neq 0$ et si $\dfrac{u}{v}$ est bien définie, alors $\dfrac{u}{v}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

Propriété 7.10

Soient u et v deux suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. Alors :
- Si $\dfrac{1}{v}$ est définie, $\dfrac{1}{v}$ converge vers 0.
- Si u est minorée alors $u + v$ tend vers $+\infty$.
- Si u est minorée par un nombre strictement positif alors $u \times v$ tend vers $+\infty$.

Propriété 7.11

Si u converge vers 0 et si $u_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{1}{u}$ tend vers $+\infty$.

Remarques 7.12

Propriété 7.13

Soient u et v deux suites telles que, pour tout entier n, $u_n \leq v_n$. Alors :

- Si u tend vers $+\infty$ alors v tend vers $+\infty$.
- Si v tend vers $-\infty$ alors v tend vers $-\infty$.
- Si v converge vers l fini alors u est majorée.

Corollaire 7.14

Soit u une suite réelle qui converge vers l et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n > 0$. Alors on a : $l \geq 0$.

Remarques 7.15

Propriété 7.16

Soient u, v et w trois suites telles que $u_n \leq w_n \leq v_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Si u et v tendent vers la même limite, il en est de même de w.

Remarque 7.17

Propriété 7.18

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ (resp. $-\infty$, $+\infty$) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = l$ (resp. $-\infty$, $+\infty$).

Remarque 7.19

Définition 7.20

Soient u et v deux suites réelles.
On dit que u et v sont adjacentes si et seulement si:

- u est croissante.
- v est décroissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Propriété 7.21

Deux suites adjacentes u et v convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$.

Exemple 7.22

Exemple 7.23