Variables aléatoires (Partie 4)

Variables aléatoires à densité

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, (Ω, p) est un espace probabilisé.

1 Généralités

Définition 1.1

Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) est une application de (Ω, p) dans $\mathbb{R}$.
La fonction de répartition d'une v.a.r. X, qui est notée F ou F_X, est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = F(x) = P(X \leq x)$ pour tout x.

Remarque 1.2

Dans les chapitres précédent, nous avons restreint l'étude des v.a.r. au cas où $X(\Omega)$ était un ensemble discret (v.a.r. discrètes).

Définition 1.3

On dit qu'une v.a.r. X définie sur (Ω, p) est une v.a.r. *à densité* s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f_X est positive ou nulle.

(ii) f_X est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, F_X la fonction de répartition de X vérifie $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction f_X s'appelle alors *une densité* de la v.a.r. X.

Propriété 1.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) f est positive ou nulle.

(ii) f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Alors il existe un espace probabilisé (Ω, p) et une v.a.r X définie sur cet espace, tels que f soit une densité de la variable X. On dit que f est une *densité de probabilité*.

Exemple 1.5

On veut vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Propriété 1.6

Si f est une densité d'une v.a.r. X de fonction de répartition F alors :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) F est continuement dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(iii) En tout point x où F est dérivable, on a $F'(x) = f(x)$.

Remarques 1.7

Propriété 1.8

Soit X une v.a.r de fonction de répartition F. Si :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est continuement dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Alors X est une v.a.r. à densité.
De plus, si f est positive ou nulle et si f vérifie $F'(x) = f(x)$ en tout x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 1.9

Soit X une v.a.r. dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

On veut montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

Propriété 1.10

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) F est continuement dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Alors il existe une v.a.r. X définie sur un espace probabilisé (Ω, p) telle que F soit la fonction de répartition de X.
X est alors une v.a.r. à densité et, si $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable avec f positive ou nulle, alors f est une densité de X.

Exemple 1.11

On considère la fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

On veut montrer que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité et en déterminer une densité.

Propriété 1.12

Soit X une v.a.r. admettant une densité f.

(i) Pour tout réel a, on a $P(X{=}a) = 0$

(ii) Pour tout réel a, on a :

$$P(X{<}a) = P(X{\leq}a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = F(a).$$

$$P(X{>}a) = P(X{\geq}a) = \int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F(a).$$

(iii) Pour tous les réels a et b tels que $a \leq b$, on a :

$$P(a{<}X{<}b) = P(a{\leq}X{<}b) = P(a{<}X{\leq}b) = P(a{\leq}X{\leq}b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Exemple 1.13

Corollaire 1.14

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit X une v.a.r à densité et soit f une densité de X.
Si $f(x) = 0$ lorsque $x \notin [a; b]$, alors $P(X{<}a) = 0$ et $P(X{>}b) = 0$.
On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple 1.15

Remarque 1.16

Définition 1.17

Deux v.a.r. à densité X et Y sur le même espace probabilisé (Ω, p) sont dites *indépendantes* si pour tous réels x et y, on a $P\left((X{\leq}x) \cap (Y \leq y)\right) = P(X{\leq}x) \times P(Y \leq y)$.

2 Espérance et variance d'une v.a.r. à densité

Définition 2.1

Soit X une v.a.r. de densité f. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente, on dit que X *admet une espérance* et on note $E(X)$ la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On veut montrer que f est une densité d'une v.a.r. X et que X admet une espérance.

Définition 2.3

On dit qu'une v.a.r. X est *centrée* si $E(X) = 0$.

Propriété 2.4

Soit X une v.a.r. à densité admettant une espérance. Alors pour tous les réels a et b, la v.a.r. $aX + b$ admet une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Propriété 2.5

Soient X et Y deux v.a.r. à densité admettant une espérance. Si $X+Y$ est une v.a.r. à densité alors elle admet une espérance et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Définition 2.6

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une v.a.r X admet un *moment d'ordre* r si l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x^r f(x)| \, \mathrm{d}x$ est convergente. On note $m_r(X)$ la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^r f(x) \, \mathrm{d}x$.

Remarque 2.7

Définition 2.8

Si une v.a.r. X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle *variance de* X le réel $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.

Propriété 2.9

Soit X une v.a.r. à densité. X admet une variance si et seulement si$X$ admet un moment d'ordre 2. Et, en cas d'existence, on a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Exemple 2.10

Définition 2.11

Si une v.a.r à densité X admet une variance alors $V(X) \geq 0$ et on appelle alors *écart-type* le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 2.12

Si une v.a.r à densité X admet une variance alors, pour tous les réels a et b, la v.a.r. $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Définition 2.13

On dit qu'une v.a.r à densité X est *réduite* si $\sigma(X) = 1$.

Définition 2.14

Si une v.a.r à densité X admet une espérance et un écart-type non nul, alors la variable $\widetilde{X} = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée la variable *centrée réduite associée* à X.

3 Lois usuelles

3.1 Loi uniforme

Définition 3.1

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
On dit qu'une v.a.r. X suit la loi *uniforme* sur $[a; b]$, et on note $X \sim \mathscr{U}([a; b])$, si la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de X.

Exemple 3.2

Il passe exactement un bus toutes les 30 mn à un arrêt. On suppose que le bus s'arrête à chaque fois. On s'interesse à la probabilité X de voir un bus s'arrêter sur un intervalle de temps choisi.

Exemple 3.3

Propriété 3.4

La fonction de répartition d'une v.a.r. $X \sim \mathscr{U}([a;b])$ est $\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x \leq a \\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$.

Propriété 3.5

L'espérance d'une v.a.r. $X \sim \mathscr{U}([a;b])$ est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Exemple 3.6

3.2 Loi exponentielle

Définition 3.7

Soit λ un réel *strictement positif.*
On dit qu'une v.a.r. X suit la loi *exponentielle de paramètre* λ et on note $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ est une densité de X.

Exemples 3.8

Propriété 3.9

La fonction de répartition d'une v.a.r. $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ est $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Remarque 3.10

Exemples 3.11

- On admet que la durée X en minutes d'attente à une caisse d'un hypermarché le week-end suit une loi exponentiel de paramètre λ inconnu.
  Sachant que la probabilité qu'un client attende à la caisse moins de 10 minutes est de $0,5$, on cherche une valeur approchée de λ.
- Soit X la durée de vie en année d'une courroie d'un lave-linge. On sait que $X \sim \mathscr{E}(0,15)$.
  On cherche la probabilité qu'un lave-linge tombe en panne à cause de la courroie avant 1 an, après 4 ans et entre 5 et 10 ans.

Propriété 3.12

L'espérance d'une v.a.r. $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et sa variance est $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Exemple 3.13