Variables aléatoires (Partie 1)

Variables aléatoires discrètes

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Loi de probabilité

Rappel

On dit que (Ω, p) est un espace probabilisé si p est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ telle que :
- $p(\Omega) = 1$.
- $A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Définition 1.1

On appelle *variable aléatoire réelle* et on note simplement v.a.r. toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Dans ce cas, $X(\Omega)$ est appelé l'*univers image*.

Exemple 1.2

On considère l'expérience suivante qui sera la base de tous nos exemples pour ce chapitre.

Une urne contient six boules noires et quatre boules blanches.

On tire successivement avec remise trois boules au hasard (chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée) et on compte le nombre y de boules blanches obtenues.

Définition 1.3

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.r. alors $X^{-1}(A)$ est l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.
On notera $(X \in A)$ cet ensemble qui est donc un événement de Ω.

Exemple 1.4

Propriété 1.5

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r.
L'application $p : \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big) \to [0,1];\; A \mapsto p(X \in A)$ est une probabilité sur $X(\Omega)$ appelée *probabilité image* de X ou *loi de probabilité* de X.

Remarque 1.6

Remarques 1.7

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.r.
- Pour tout événement élémentaire a, on note $p(X{=}a)$ la probabilité $p\big(X^{-1}(\{a\})\big) = p(X \in \{a\})$.

- Soient a et b des réels

Si $A =]-\infty; a]$ on notera $p(X \in A)$ par $p(X \leq a)$.
Si $A =]-\infty; a[$, on notera $p(X \in A)$ par $p(X < a)$.
Si $A =]b; +\infty[$, on notera $p(X \in A)$ par $p(X > b)$.
Si $A = [b; +\infty[$, on notera $p(X \in A)$ par $p(X \geq b)$.
Si $A = [a; b]$, on notera $p(X \in A)$ par $p(a \leq X \leq b)$.
Etc.

Exemple 1.8

Remarque 1.9

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.r. et si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, la loi de probabilité p est l'ensemble des probabilités $p(X=\omega_1)$, $p(X=\omega_2)$, ..., $p(X=\omega_r)$ que nous noterons généralement p_1, p_2, ..., p_r.

Exemple 1.10

Remarque 1.11

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.r. et si $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, on dit simplement que X est une v.a.r. qui prend ses valeurs dans $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Propriété 1.12

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.r. et si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ alors :

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = p(X=\omega_1) + p(X=\omega_2) + \ldots + p(X=\omega_r) = 1$$

Exemple 1.13

2 Fonction de répartition

Définition 2.1

La fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1];\ x \mapsto p(X \leq x)$ est appelée *fonction de répartition* de X.

Exemple 2.2

Propriété 2.3

Soit X une v.a.r. qui prend ses valeurs dans $x_1, x_2, \ldots, x_r$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$. Alors :

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, r-1\}, \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}[, \quad F_X(x) = \sum_{k=1}^{i} p(X=x_k).$$

Remarque 2.4

Exemple 2.5

Soit X une v.a.r. à valeurs dans $[\![1; 10]\!]$ et dont le tableau de la fonction de répartition est :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(i)$	1/55	3/55	6/55	10/55	15/55	21/55	28/55	36/55	45/55	1

On cherche à calculer $P(X = 4)$, $P(2 \leq X \leq 9)$ et $P(X \geq 6)$.

Propriété 2.6

Soit X une v.a.r. qui prend ses valeurs dans $x_1, x_2, \ldots, x_r$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$.
Alors :

(i) $\forall\, x < x_1, F_X(x) = 0$.

(ii) $\forall\, x \geq x_r, F_X(x) = 1$.

(iii) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $p(X{=}x_1) = F_X(x_1)$

(v) $\forall\, i \in \{2, \ldots, r\}, p(X{=}x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

Propriété 2.7

Soit X une v.a.r. qui prend ses valeurs dans $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ et soit g une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $Z = g(X)$ et $\{z_1, z_2, \ldots, z_s\}$ l'ensemble image $g(X(\Omega)) = Z(\Omega)$.
Alors $P(Z{=}z_i) = \displaystyle\sum_{j/z_i=g(x_j)} p(X{=}x_j)$

Exemple 2.8

Remarque 2.9

3 Espérance, variance, écart-type

Définition 3.1

Soit X une v.a.r. qui prend ses valeurs dans $x_1, x_2, \ldots, x_r$.
On appelle *espérance (mathématique)* de X et on note $E(X)$ le réel :
$E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i\, p(X{=}x_i) = x_1 \times p(X{=}x_1) + x_2 \times p(X{=}x_2) + \ldots + x_r \times p(X{=}x_r)$.

Remarque 3.2

Si on note p_k la probabilité $p(X{=}x_k)$ pour tout $k \in [\![1; r]\!]$, alors :
$E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i\, p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r$.

Exemple 3.3

Remarques 3.4

Propriété 3.5

Soit X une v.a.r. qui prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ et soit g une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $E(g(X)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} g(x_i) p(X{=}x_i) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + \ldots + g(x_r)p_r$.

Exemple 3.6

Propriété 3.7

Soient X, Y deux v.a.r. définies sur (Ω, p), et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Remarque 3.8

On dit que l'espérance est linéaire.

Propriété 3.9

Pour toute v.a.r. X, la variable $X - E(X)$ est centrée.

Définition 3.10

Soit X une v.a.r. définie sur (Ω, p).
On appelle *variance* de X et note $V(X)$ le réel positif $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$.
L'*écart-type* de X noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance de X i.e. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 3.11

Soit X une v.a.r. définie sur (Ω, p). Alors $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Exemple 3.12

Remarques 3.13

Propriété 3.14

Soit X une v.a.r. définie sur (Ω, p) et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
Ou encore $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$.

Définition 3.15

On dit qu'une v.a.r X est réduite si et seulement si$\sigma(X) = 1$.

Propriété 3.16

Pour toute v.a.r. X d'écart type non nul alors $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

4 Variables aléatoires discrètes infinies

Exemple 4.1

Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule de la façon suivante : si l'on obtient une boule noire, on arrête le jeu. Si l'on obtient une boule rouge, alors on la remet dans l'urne, accompagnée d'une autre boule rouge. On continue ainsi de suite.

Définition 4.2

On dit qu'une v.a.r. est discrète infinie si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $X(\Omega)$ n'est pas majoré.

Exemple 4.3

Remarque 4.4

Définition 4.5

La loi de probabilité d'une v.a.r. discrète infinie X est la donnée des couples (x_k, p_k) pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ où $x_k \in X(\Omega)$ et $p_k = p(X{=}x_k)$.

Exemple 4.6

Propriété 4.7

Si X est une v.a.r. discrète infinie alors la série $\sum p(X{=}x_k)$ est convergente de somme 1.

C'est-à-dire $\sum_{i=1}^{+\infty} p_k = 1$.

Exemple 4.8

Propriété 4.9

Soit F la fonction de répartition d'une v.a.r. discrète infinie X telle que $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ avec $x_1 < x_2 < ... < x_k < ..$, alors, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

(i) $F(x) = 0$ si $x < x_1$

(ii) $p_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$

(iii) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Remarque 4.10

Exemple 4.11

Définition 4.12

Soit X une v.a.r. discrète infinie.
Si la série $\sum x_i p(X{=}x_i)$ est convergente alors on appelle *espérance (mathématique)* de X et on note $E(X)$ le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \, p(X{=}x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \, p_i$.

Exemple 4.13

Définition 4.14

Soit X une v.a.r. discrète infinie.
Si les séries $\sum x_i p(X{=}x_i)$ et $\sum x_i^2 p(X{=}x_i)$ sont convergentes alors on appelle *variance* de X et on note $V(X)$ le réel $V(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 \, p(X{=}x_i) - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i \, p(X{=}x_i)\right)^2$.
Autrement dit, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

5 Convergence

Propriété 5.1

Si X est une v.a.r., alors on a $\forall\, r > 0, \forall \varepsilon > 0,\ p(|X| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}$.
Cette propriété est appelée l'inégalité de Tchebychev.

Propriété 5.2

Si X est une v.a.r., alors on a $\forall \varepsilon > 0,\ p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.
Cette propriété est appelée l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème 5.3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2.
Alors $\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} p\left(\left|\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.
Cette propriété est appelée la loi faible des grands nombres.